§1 例子与概念

讲授内容：微分方程的一些具体应用实例和基本概念.

教学重点：通过讲述微分方程的一些具体应用实例，使学生认识到学习本课程的重要性.

讲授学时： 4 学时

一. 微分方程实例

例 1.1 *求曲率处处为正数 a 的曲线方程.*

解 设此曲线的方程为 $y=y(x)$. 由微分学的知识知道， $y=y(x)$ 于点 x 处的曲率为 $|y''(x)(1+y'^2(x))^{-3/2}|$. 由此知此曲线应满足方程

$$|y''(x)(1+y'^2(x))^{-3/2}|=a. \tag{1.1}$$

它就是一个微分方程. □

例 1.2 *已知现在此物体周围的温度是 $d°C$, 最初物体的温度是 $y_0^\circ C$. 设经过 t 分钟时温度为 $y(t)°C$. 求函数 $y(t)$.*

解 根据牛顿冷却定律，高温物体冷却的速率 $(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})$ 与它同周围的温度差 $-(y-d)$ 成正比. 因此 $y=y(t)$ 应满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k(y-d), \tag{1.2}$$

$$y(0) = y_0, \tag{1.3}$$

其中 k 是某个正的比例常数. 方程 (1.2) 便是一个微分方程. 条件 (1.3) 称为初值条件. □

例 1.3 *要建造高 h 米水平截面为圆形的桥墩，桥墩承受的载荷为 P 吨，建筑材料的密度为 ρ 吨／米 ^{3}, 允许的压强为 k 吨／米 ^{2}, 希望建筑材料的用量最省. 这需要求桥墩上底 S_0 与下底 S_1 的面积以及轴截面的形状 (即通过桥墩中心轴的平面与桥墩相截所得的外形曲线).*

解 首先求上底面积 S_0. 为了使建筑材料的用量最省，就应要求上底的面积 S_0(米 ^{2}) 刚好能承受载荷 P, 于是 S_0 满足 $kS_0=P$, 即

$$S_0=\frac{P}{k}.$$

再求下底的面积 S_1. 注意到随着水平位置的下移，水平截面的面积必须不断增大. 这是因为截面除了承受载荷 P 外，还要承受它以上那段桥墩的重量. 下面来讨论在建筑材料用量最省的条件下，水平截面应按什么样的规律增大.

以上底的圆心为原点，以垂直向下为 x 轴正方向，任意一条水平线为 y 轴，建立平面直角坐标系．以 $S = S(x)$ 表示距离上底 x 米处水平截面的面积 (米 ^{2}). 当 $\Delta x > 0$ 时，为了使建筑材料的用量最省，就应该让 $S(x+\Delta x)$ 比 $S(x)$ 大的面积刚好能承受从 x 到 $x+\Delta x$ 这一段桥墩的重量，即让

$$k(S(x+\Delta x) - S(x)) \approx \rho S(x)\Delta x,$$

于是

$$\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \approx mS(x),$$

其中 $m = \rho k^{-1}$. 令 $\Delta x \to 0$, 就得到函数 $S = S(x)$ 所应满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = mS,$$

它也是一个微分方程． $S(x)$ 还应满足初值条件

$$S(0) = S_0.$$

利用解 $S(x)$ 即可求得 S_1 的面积以及轴截面的形状． □

例 1.4 *1949 年美国芝加哥大学利比 (W. F. Libby) 建立的碳 -14 测定年代的方法是考古工作者重要的断代手段之一．其原理如下：从星际空间射到地球的射线称为宇宙线．宇宙线中子穿过大气层时撞击空气中的氮核，引起核反应而生成具有放射性的碳 -14. 宇宙线的强度可以认为是不变化的，它经年不息地射到地球上来，不断地产生着碳 -14, 而碳 -14 本身又不断地放出 β 射线裂变为氮．这种不断产生不断裂变的过程从古到今一直进行着，因此大气中的碳 -14 实际上处于动态平衡，大气中碳 -14 的含量 (指物体标本中碳 -14 的原子个数与非放射性碳原子个数之比) 可认为是一常值 (实测约为 1.2×10^{-12}). 碳 -14 和其它碳原子在化学性质上毫无区别．它与氧化合生成放射性二氧化碳，通过光合作用而进入植物体内．动物吃植物，碳 -14 又进入动物体内．因此在活的动植物体中碳 -14 的含量与大气中的含量大致相同．动植物一死，体内碳 -14 得不到补充，只是不断地裂变为氮而减少．已经知道放射性元素的裂变规律遵循：裂变速率与剩余量成正比．对碳 -14 来说，其半衰期为 5730 年．这样，从动植物死体碳 -14 的含量就可以约略推算出它的死亡年代.*

例如， 1972 年发掘长沙市东郊马王堆一号汉墓时，对其棺椁外主要用以防潮吸水用的木炭进行分析，得知它含碳 -14 的量约为大气中的 0.7757 倍，试据此推算木炭的年代，即女尸下葬的年代.

解 以 t 表示时间 (年), $t=0$ 对应于木炭烧制的时刻，以 $y=y(t)$ 表示木炭经过 t 年后碳 -14 的含量，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 是碳 -14 的增长速率，而碳 -14 的裂变速率便是 $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 故按裂变规律，我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-ky, \tag{1.4}$$

其中 $k>0$ 为比例常数. 木炭在 $t=0$ 时的碳 -14 含量与大气中的含量 $\alpha=1.2\times10^{-12}$ 大致相同，而经过 5730 年后衰减了一半，故函数 $y(t)$ 还应满足如下条件：

$$y(0)=\alpha,\quad y(5730)=\frac{\alpha}{2}. \tag{1.5}$$

为了求满足 (1.4) 的函数，我们将 (1.4) 写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-k\mathrm{d}t,$$

积分便得

$$\ln y=-kt+C,$$

从而

$$y=e^{-kt+C}=C_1e^{-kt},$$

其中 C 和 C_1 为任意常数. 不论 C 和 C_1 取何值，上式确定的函数都满足方程 (1.4). 我们所要求的是同时还满足条件 (1.5) 的函数. 由 (1.5) 中第一个条件可知应取 $C_1=\alpha$, 而由 (1.5) 中第二个条件则知应满足

$$\alpha e^{-5730k}=\frac{\alpha}{2},$$

据此便可确定

$$k=\ln 2/5730.$$

假设木炭是 T 年前烧制的，经过 T 年，其碳 -14 的含量已减少为大气中含量的 0.7757 倍，故应有

$$0.7757\alpha=\alpha e^{-kT}.$$

由此算出

$$T=-\ln(0.7757)/k=-5730\ln(0.7757)/\ln 2\approx 2100.$$

这表明长沙汉墓中的女尸大约是在公元前 128 年下葬的. □

例 1.5 *英国人马尔萨斯根据百余年的统计资料，于 1798 年提出了闻名于世的所谓* **马尔萨斯人口模型**: *单位时间内人口的增长量与人口成正比. 设时刻 t 的人口数量为 $N(t)$, 开始时刻 $t=0$ 时的人口数量为 N_0, r 为比例系数. 求 $N(t)$.*

解 根据马尔萨斯的理论，从时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$ 的人口增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)\approx rN(t)\Delta t,$$

从而

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}\approx rN(t).$$

令 $\Delta t\to 0$ 就得到

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN.$$

用例 1.4 中所述方法可求得它的解为

$$N=N_0e^{rt}.$$

自限人口模型 (Logistic 模型):

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{N_m}\right)N,$$

其中 N_m 表示自然资源和环境条件所容许的最大人口数量. 其解为:

$$N(t)=\frac{N_m}{1+\left(\frac{N_m}{N_0}-1\right)e^{-rt}},$$

其中 N_0 是开始时刻 $t=0$ 时的人口数量.

上述自限模型也可描述自然界中许多生物数量的增长规律:

1) 若以 $N(t)$ 表示某渔场鱼的数量， N_m 表示渔场资源条件所限制的鱼的最大数量，那么该模型就描述了该渔场鱼的总量随着时间变化的规律;

2) 如果假设单位时间的捕捞量与鱼量成正比，比例系数为 k, 则在有捕捞的情况下，渔场的鱼量随时间变化的规律应满足下面的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{N_m}-k\right)N.$$

□

例 1.6 *从牛顿第二定律 (运动定律) 知道，运动物体的加速度与作用力 (合外力) 成正比. 假设在物理空间 $\mathbb{R}^3$ 中，物体的位置坐标为 $\mathbf{x}$, 所受到的力为 $f(\mathbf{x},\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t})$. 求物体满足的运动规律.*

解 由微积分学知道，物体的速度和加速度分别为 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}$. 故由牛顿第二定律有

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}=f\left(\mathbf{x},\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\right),$$

其中 m 是物体的质量. 这种方程统称为 **牛顿运动方程**.

如果考虑的是 N 个天体 (例如太阳系) 的运行, 每个星体的质量为 $m_i, i = 1, \cdots, N$, 坐标为 $\mathbf{x_i}, i = 1, \cdots, N$, 它们构成一个星系. 根据牛顿运动定律和万有引力定律, 这 N 个天体满足方程:

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t^2} = -\sum_{1 \le j \le N, j \ne i} G m_i m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^3}, \quad i = 1, \cdots, N, \tag{1.6}$$

其中 $\|p - q\|$ 表示 p 和 q 两点间的距离, $G = 6.6732 \times 10^{-11}$ 表示万有引力常数. □

例 1.7 如下形式的一组微分方程称为 **哈密顿系统**

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

其中

$$H = H(p_1, \cdots, p_n; q_1, \cdots, q_n; t)$$

是一已知函数, 或简写为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{1.7}$$

其中 $p = (p_1, \cdots, p_n), q = (q_1, \cdots, q_n)$, $H = H(p, q, t)$, p 称为 **广义动量**, q 称为 **广义坐标**.

当函数 H 不含 t 时, (1.7) 称为 **保守系统**. 若 $p = p(t), q = q(t)$ 满足 (1.7), 对 (1.7) 微分, 便得到

$$\mathrm{d}H = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = 0,$$

即 $H(p(t), q(t)) \equiv C$(常数), 它所刻画的是 **能量守恒定律**.

当 H 只含 p, 即 $H = H(p)$ 时, (1.7) 称为 **可积系统**. 此时 $p = p(t), q = q(t)$ 若满足方程 (1.7), 则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H(p(t))}{\partial q} \equiv 0, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(p(t))}{\partial p} = \frac{\partial H(p_0)}{\partial p} = \omega_0,$$

从而

$$p = p_0, \quad q = \omega_0 t + q_0,$$

其中 p_0, ω_0, q_0 均为常向量.

例 1.8 在一个市场经济体系中，基本的要素之一是要求市场价格能够促使商品的供给和需求关系相互协调一致，那样的价格就称为 **均衡价格**. 然而，通常情形是实际的市场价格与均衡价格并不相同，出现一定的偏差，并且，市场价格也不是静态的，而是随着时间发生波动，即所谓随行就市. 因此，我们应当视商品价格 x 为时间 t 的函数，并且假定价格的变化是正比于需求与供给之差. 设 $f(x,\alpha)$ 和 $g(x)$ 分别表示需求函数和供给函数，其中 α 是参数，它表示消费者的收入. 那么，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r(f(x,\alpha) - g(x)),$$

其中 r 是比例系数.

二. 基本概念

微分方程：联系着自变量和未知函数以及未知函数的某些微商的方程.

常微分方程 (ODE): 未知函数只与一个自变量有关的微分方程.

偏微分方程 (PDE): 未知函数与多个自变量有关的微分方程.

方程的阶：出现在微分方程中的未知函数微商的最高阶数.

n 阶常微分方程的一般形式：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0, \tag{1.8}$$

其中 F 是关于变量 $x,y,\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数， $y^{(i)}$ 表示对 x 的 i 阶微商.

定义 1.1 *称函数 $y=\varphi(x)$ 是 (1.8) 在区间 I 上的* **解**, *如果它在区间 I 上有定义，具有 (1.8) 中要求的各阶导数，并且使得*

$$F(x,\varphi(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x\in I$$

恒成立.

定义 1.2 *方程 (1.8) 含有 n 个彼此独立的任意常数 $c_1,\cdots,c_n$ 的解族 $y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$ 称为 (1.8) 的* **通解**, *而 (1.8) 的任何单个解称为* **特解**.

定义 1.3 *如果由函数方程*

$$\Phi(x,y) = 0 \tag{1.9}$$

所确定的隐函数 $y=y(x)$ 是 (1.8) 的解，则 (1.9) 称为 (1.8) 的 **隐式解**.

定义 1.4 *如果由含 n 个任意常数 $c_1,\cdots,c_n$ 的函数方程*

$$\Phi(x,y,c_1,\cdots,c_n) = 0 \tag{1.10}$$

所确定的函数族 $y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$ 是 (1.8) 的通解，则 (1.10) 称为 (1.8) 的 **隐式通解**.

定义 1.5 求微分方程之满足某一个 (或一组) 特定的条件的解的问题称为 **定解问题**, 这种特定的条件称为 **定解条件**. 最重要的定解条件是 **初值条件**:

$$y^{(i)}(x_0) = y_i, \quad i = 0, \cdots, n-1, \tag{1.11}$$

其中 $x_0 \in I$ 是自变量的某个给定值, $y_i, i = 0, \cdots, n-1$ 是未知函数及其 1 到 $n-1$ 阶微商的给定值. 求 n 阶常微分方程 (1.8) 满足初值条件 (1.11) 的解的问题称为 **初值问题 (IVP)** 或 **柯西问题**. 另一种常见定解条件是 **边值条件**, 求方程满足边值条件的解的问题称为 **边值问题 (BVP)**.

二阶常微分方程的边值条件:

I. **狄利克莱问题**:

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

II. **周期边值问题**:

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

定义 1.6 设 $I = \mathbb{R}^1$, F 关于 x 是 T- 周期函数: $F(x+T, \cdot) = F(x, \cdot)$. 如果 T- 周期函数 $y = y(x)$ 于 $\mathbb{R}^1$ 上满足方程 (1.8), 则称它是 (1.8) 的一个 **T- 周期解**.

正规形常微分方程: 按未知函数最高阶微商解出的方程

$$y^{(n)} = f(x, y, \cdots, y^{(n-1)}). \tag{1.12}$$

引进 n 个未知函数

$$y_1 = y, \ y_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, y_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}.$$

则方程 (1.12) 可化成如下的一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_2, \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x} = y_n, \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f(x, y_1, \cdots, y_n). \end{cases}$$

一阶方程组的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = f_2(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_n(x, y_1, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{1.13}$$

上面介绍的各种概念，可以完全类似地移到方程组.

三. 作业

第 9 页：第 1 题 (1); 第 2 题 (3); 第 4 题.