§2 典型方程的解法

2.1 变量可分离方程

讲授内容：变量可分离方程的解法.
教学重点：变量可分离方程的解法.
讲授学时： 2 学时

一. 变量可分离方程的解法

变量可分离方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(x)g(y), \tag{2.1}$$

其中函数 $h(x)$ 和 $g(y)$ 在相应区间上连续.

1. 如果有 y_0 使得 $g(y_0) = 0$, 则 $y = y_0$ 是 (2.1) 的解;
2. 如果 $g(y) \neq 0$, 作变换 $z = \int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y$, 则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{g(y)} \cdot h(x)g(y) = h(x).$$

解之，得

$$z = \int h(x)\mathrm{d}x + C,$$

其中 C 是任意常数. 代回去就得到原方程的隐式通解

$$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int h(x)\mathrm{d}x + C.$$

二. 例题

例 2.1 *解方程*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2y. \tag{2.2}$$

解 它是变量可分离方程. 当 $y \neq 0$ 时，分离变量:

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x.$$

两边积分，得隐式通解

$$\ln|y| = x^3 + C_1,$$

其中 C_1 是任意实数．它可以改写为

$$y = C_2 e^{x^3},$$

其中 $C_2 = \pm e^{C_1}$．注意到 $y = 0$ 也是方程 (2.2) 的解，因此方程通解最终可表示为

$$y = C e^{x^3},$$

其中 C 可取正，负和零的任意实数． □

例 2.2 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

解 它是变量可分离方程．当 $y \neq \pm 1$ 时，分离变量：

$$(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x.$$

两边积分，得隐式通解

$$\arcsin y = x^2 + C,$$

其中 C 是任意常数．它可以写成显形式

$$y = \sin(x^2 + C).$$

此外，它还有两个特解 $y = \pm 1$． □

三．习题

解下列方程：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1+y^2}{xy+x^3y}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x-y}$;

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{xy+y}{xy+x}$.

四．作业

第 15 页：第 1 题 (2), (3).