2.2 齐次方程

讲授内容：齐次方程的解法.
教学重点：齐次方程的判别及其解法.
讲授学时： 2 学时

一. 齐次方程的解法

齐次方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.3}$$

作未知函数变换 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$. 则方程 (2.3) 化为变量可分离方程:

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=g(u),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}(g(u)-u).$$

二. 例题

例 2.3 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

解 方程可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\sigma\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \tag{2.4}$$

其中 σ 当 $x>0$ 时取 1, 当 $x<0$ 时取 -1.

令 $y=xu$, (2.4) 变为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sigma\sqrt{1+u^2}.$$

分离变量:

$$\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=\frac{\sigma}{x}\mathrm{d}x.$$

两边积分，得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\sigma\ln|x|+C_1,$$

即

$$u+\sqrt{1+u^2}=C_2x^\sigma, \tag{2.5}$$

其中 C_1 和 C_2 都是任意常数， $C_2 \neq 0$. 注意到

$$u-\sqrt{1+u^2}=-(u+\sqrt{1+u^2})^{-1}=-(C_2x^{\sigma})^{-1}. \tag{2.6}$$

将 (2.5) 和 (2.6) 相加除以 2, 并记 $C=C_2$, 得

$$u=\frac{C}{2}x-\frac{1}{2C}x^{-1}.$$

将 u 换成 $\frac{y}{x}$, 便得到原方程的通解

$$y=\frac{C}{2}x^2-\frac{1}{2C}.$$

□

三. 齐次方程的其它形式

1. 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}, \tag{2.7}$$

其中函数 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 都是 x 和 y 的 m 次齐次函数，即对 $t>0$ 有

$$M(tx,ty)\equiv t^mM(x,y),\quad N(tx,ty)\equiv t^mN(x,y).$$

事实上，取 $t=\frac{1}{x}$, 则方程 (2.7) 可改写成形如 (2.3) 的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^mM(1,\frac{y}{x})}{x^mN(1,\frac{y}{x})}=\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}.$$

2. 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{2.8}$$

其中右端函数 $f(x,y)$ 是 x 和 y 的零次齐次函数，即对 $t>0$ 有

$$f(tx,ty)\equiv f(x,y).$$

事实上，取 $t=\frac{1}{x}$, 则方程 (2.8) 可改写成形如 (2.3) 的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

例 2.4 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

解 令 $y = xu$. 则方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{xu^2}.$$

分离变量，积分得

$$\frac{1}{3}u^3 = \ln x + C_1,$$

代回原变量，整理得

$$y^3 = x^3(\ln x^3 + C)$$

其中 C_1, C 是任意常数. □

四. 习题

解下列方程：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$;

(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1 + \ln y - \ln x)$.

五. 作业

第 13 页：第 1 题 (1), (3).