2.3 可化为齐次方程的方程

讲授内容：可化为齐次方程的方程的解法.
教学重点：将几类特殊类型的方程化为齐次方程.
讲授学时： 2 学时

一. 可化为齐次方程的方程的解法

具有如下形式的方程均可化为齐次方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \tag{2.9}$$

其中 a,b,c,a_1,b_1,c_1 都是常数.

1. 当 $c=c_1=0$ 时，此方程就是齐次方程.
2. 当 $c^2+c_1^2\neq 0$, 并且

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$$

时，引进新变量

$$x=\xi+\alpha,\quad y=\eta+\beta,$$

其中 $x=\alpha,\ y=\beta$ 是二元一次联立方程组

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$$

的唯一解．这时方程 (2.9) 化成齐次方程：

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right).$$

3. 当 $c^2+c_1^2\neq 0$ 且 $\Delta=0$ 时，存在实数 λ, 使得 $a_1=\lambda a,\ b_1=\lambda b$, 或有 $a=\lambda a_1,\ b=\lambda b_1$. 不妨设是前者．于是 (2.9) 可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right).$$

作变换 $z=ax+by$, 就化成变量可分离方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a+bf\left(\frac{z+c}{\lambda z+c_1}\right).$$

4. 对 特殊的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c),$$

作变换 $z=ax+by$, 就直接化成变量可分离方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a+bf(z+c).$$

二. 例题

例 2.5 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x+y+2}{x+y-4}. \tag{2.10}$$

解 这对应着前面的第二种情况. 先求解二元一次联立方程组

$$\begin{cases}-x+y+2=0,\\ \quad x+y-4=0,\end{cases}$$

得到唯一解 $x=3,\ y=1$. 作变换

$$x=\xi+3,\quad y=\eta+1.$$

则 (2.10) 化为齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{-\xi+\eta}{\xi+\eta}.$$

做变换 $u=\frac{\eta}{\xi}$, 即 $\eta=u\xi$, 得变量可分离方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=-\frac{1+u^2}{(1+u)\xi}.$$

解之, 并 代回原变量 x 和 y, 则得方程 (2.10) 的隐式通解:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=Ce^{-2\arctan\frac{y-1}{x-3}}.$$

□

例 2.6 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin^2(x-y).$$

解 这也是形如 (2.9) 的方程, 它对应于 $a_1=b_1=0, c_1\neq 0$, 且 $\Delta=0$ 的情形, 即上面的第四种情形. 作未知函数变换 $z=x-y$, 则化成变量可分离方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\cos^2 z.$$

当 $\cos z \neq 0$ 时，分离变量，两边积分，并代回 x, y, 可得隐式通解：

$$\operatorname{tg}(x-y) = x + C.$$

当 $\cos z = \cos(x-y) = 0$ 时，还得到另一族解：

$$y = x + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

其中 k 是任意整数. □

三. 习题

解下列方程：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-2y+1}{2x-4y+1}$;

(3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x+y)^2 + 3$.

四. 作业

第 15 页：第 1 题 (1), (3), (5).