2.4 一阶线性方程

讲授内容：一阶线性方程.
教学重点：一阶线性方程的解法及其基本性质.
讲授学时： 2 学时

一. 一阶线性方程的解法

一阶非齐次线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x), \tag{2.11}$$

其中函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 I 上连续，且 $q(x)\not\equiv 0$.

一阶齐次线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0. \tag{2.12}$$

求解思路：选取适当的函数 $S(x)$, 使得经变换

$$z=S(x)y \tag{2.13}$$

后方程简化为可直接积分的形式.

分析： 将 (2.13) 代入 (2.11), 得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(S'(x)-p(x)S(x))y+q(x)S(x).$$

假如能选取 $S(x)$, 使得

$$S'(x)-p(x)S(x)=0, \tag{2.14}$$

则我们的目的便可达到. 利用方程 (2.14), 可得

$$S=Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

其中 C 为任意常数.

解法： 根据以上分析，选取

$$S=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

则方程 (2.11) 在变换 (2.13) 下，化成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

直接积分得到

$$z=C+\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

代回原变量，即得 (2.11) 的通解

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right),$$

其中 C 为任意常数.

另外，如果 选取

$$S = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}, \qquad x_0 \in I,$$

则得到的通解表达式为

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}\left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right), \tag{2.15}$$

特别地，方程满足初值条件

$$y(x_0) = y_0$$

的解为

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right). \tag{2.16}$$

注 2.1 *由上述推导可知：对任一 $x_0 \in I$ 和 y_0, (2.11) 满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解存在且唯一.*

二. 基本性质

定理 2.1 *设 $\varphi(x)$ 为一阶齐次线性方程 (2.12) 于区间 I 上的解. 若于某点 $x_0 \in I$, 有 $\varphi(x_0) \neq 0$, 则 $\varphi(x) \neq 0,\ x \in I$.*

证明 由 (2.16) 知，齐次方程 (2.12) 满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解为

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}.$$

故 $\varphi(x)$ 应满足

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}.$$

由上述等式的特点知，只要 $\varphi(x_0) \neq 0$, 就有 $\varphi(x) \neq 0, x \in I$. □

定理 2.2 *设 $\varphi(x)$ 是方程 (2.12) 于区间 I 上的一非零解， $y = \psi(x)$ 是方程 (2.11) 于区间 I 上的任一解. 则含任意常数 C 的表达式*

$$y = C\varphi(x) + \psi(x) \tag{2.17}$$

是方程 (2.11) 于区间 I 上的全部解的共同表达式.

证明 这个定理要证明的是对任何常数 C, (2.17) 都是方程 (2.11) 的解以及对方程 (2.11) 的任一解，都可以找到常数 C 将其表示成 (2.17) 的形式．对于前半部分，直接代入就知．反之，设 $y_0(x)$ 是方程 (2.11) 的任一解，则 $y_0(x)-\psi(x)$ 是齐次方程 (2.12) 的解．任取 $x_0\in I$．按假设和定理 2.1, $\varphi(x_0)\neq 0$．令 $C=\varphi(x_0)^{-1}(y(x_0)-\psi(x_0))$, 则 $C\varphi(x)$ 和 $y_0(x)-\psi(x)$ 都是齐次方程 (2.12) 的解，并且在 $x=x_0$ 时取相同的值，故由注记 2.1 所言初值问题解的唯一性知，应有 $C\varphi(x)=y_0(x)-\psi(x)$, 即 $y_0(x)=C\varphi(x)+\psi(x)$. □

三. 例题

例 2.7 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=e^{x^2}\cos x.$$

解 这是一阶非齐次线性方程．其通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{\int 2x\mathrm{d}x}(C+\int e^{x^2}\cos x e^{-\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x) \\ &= e^{x^2}(C+\int e^{x^2}\cos x e^{-x^2}\mathrm{d}x) \\ &= e^{x^2}(C+\sin x). \end{aligned}$$

□

例 2.8 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+py=q,$$

其中 $p(\neq 0), q$ 是常数．

解 显然， $y=\frac{q}{p}$ 是该方程的一个解， e^{-px} 是方程对应的齐次方程的非零解．因此由定理 2.2, 该方程的通解为

$$y=Ce^{-px}+\frac{q}{p}.$$

□

例 2.9 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+4xy=x.$$

解 易见 $y=\frac{1}{4}$ 是它的解， $y=e^{-2x^2}$ 是它相应齐次线性方程的解．于是它的通解为

$$y=Ce^{-2x^2}+\frac{1}{4}.$$

□

四．习题

1. 解下列方程：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - x^4 + 4x^3$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\sin x - \sin^2 x + \cos x$.

五．作业

第 17 页：第 1 题 (1), (4), (6); 第 2 题.