

2.5 伯努利方程

讲授内容：伯努利方程.

教学重点：伯努利方程的解法.

讲授学时：1 学时

一. 伯努利方程的解法

伯努利方程：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \quad (2.18)$$

其中 n 是实数, $n \neq 0, 1$, $p(x), q(x)$ 在区间 I 上连续, $q(x) \neq 0$.

解法：

1. 如果 $y \neq 0$, 则以 y^n 除 (2.18) 两侧, 得

$$\frac{y^{-n}dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x),$$

即

$$\frac{dy^{1-n}}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)q(x).$$

这是关于未知函数 y^{1-n} 的一阶线性方程.

2. 注意到当 $n > 0$ 时, $y = 0$ 也是伯努利方程的解.

二. 例题

例 2.10 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = x^3y^3 - xy.$$

解 当 $y \neq 0$ 时, 以 y^3 除方程两侧, 得

$$\frac{dy^{-2}}{dx} - 2xy^{-2} = -2x^3.$$

这是关于 y^{-2} 得一阶线性方程. 解之, 得隐式通解:

$$y^{-2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1,$$

其中 C 为任意常数. 此外, 注意到 $n = 3 > 0$, 所以 $y = 0$ 也是该伯努利方程的解. □

三. 习题

1. 解方程: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4+y^3}{xy^2}$.

四. 作业

第 18 页: 第 1 题 (3); 第 19 页: 第 3 题.