2.6 恰当方程

讲授内容：恰当方程.
教学重点：恰当方程的定义及其原函数的求法.
讲授学时： 2 学时

一. 恰当方程的定义

写成微分形式的微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0, \tag{2.19}$$

如果满足条件：存在可微函数 $U(x,y)$, 使得

$$\mathrm{d}U(x,y)=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

即

$$U_x(x,y)=M(x,y),\quad U_y(x,y)=N(x,y), \tag{2.20}$$

则称其为 **恰当方程**, 或称 **全微分方程**.

在上述情形，方程 (2.19) 可以写成 $\mathrm{d}U(x,y)\equiv 0$. 于是

$$U(x,y)\equiv C$$

就是方程 (2.19) 的隐式通解，此处 C 是任意常数 (应使函数有意义).

二. 判定准则及求解方法

定理 2.3 *设函数 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 均于矩形域 $G: a<x<b,\ \alpha<y<\beta$ 连续可微. 则方程 (2.19) 是恰当方程的充要条件是*

$$M_y(x,y)=N_x(x,y),\quad (x,y)\in G. \tag{2.21}$$

而且当 (2.21) 成立时，相应的原函数可取为

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(s,y)\mathrm{d}s+\int_{y_0}^{y}N(x_0,t)\mathrm{d}t, \tag{2.22}$$

也可取为

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(s,y_0)\mathrm{d}s+\int_{y_0}^{y}N(x,t)\mathrm{d}t, \tag{2.23}$$

其中 $(x_0,y_0)\in G$ 是任意取定的一点.

证明 利用恰当方程的定义，定理的必要性证明是简单的. 因为若 (2.19) 是恰当方程，则有可微函数 $U(x,y)$ 满足 (2.20). 从而

$$M_y(x,y)\equiv U_{yx}(x,y)=U_{xy}(x,y)\equiv N_x(x,y),$$

即 (2.21) 成立. 下面证明定理的充分性，即从 (2.21) 成立推证由 (2.22) 或 (2.23) 所表出的函数 $U(x,y)$ 满足 (2.20). 从 (2.22) 可知

$$\begin{aligned}
U_x(x,y) &\equiv M(x,y),\\
U_y(x,y) &\equiv \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(s,y)\mathrm{d}s+N(x_0,y)\\
&= \int_{x_0}^{x}M_y(s,y)\mathrm{d}s+N(x_0,y)\\
&= \int_{x_0}^{x}N_s(s,y)\mathrm{d}s+N(x_0,y)=N(x,y),
\end{aligned}$$

即 (2.20) 成立. 同理也可从 (2.23) 推出 (2.20). □

三. 例题

例 2.11 解方程

$$xy\mathrm{d}x+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=0. \tag{2.24}$$

解 这里 $M=xy, N=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}$. 则 $M_y=x=N_x$. 所以 (2.24) 是恰当方程. 因为 N 于 $y=0$ 处无意义，所以应分别在 $y>0$ 和 $y<0$ 区域上应用定理 2.3. 可以按下述任意一条途径去求相应的原函数 $U(x,y)$.

先选取 $(x_0,y_0)=(0,1)$, 代入公式 (2.22) 有

$$U=\int_0^x xy\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{x^2}{2}y+\ln y.$$

再选取 $(x_0,y_0)=(0,-1)$, 代入公式 (2.22) 有

$$U=\int_0^x xy\mathrm{d}x+\int_{-1}^y\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{x^2}{2}y+\ln(-y);$$

可见，不论 $y>0$ 和 $y<0$ 都有

$$U=\frac{x^2}{2}y+\ln|y|.$$

四. 恰当方程的其它求解方法

利用恰当方程的特点，还有其它解法，下面我们以例 2.11 为例，简要说明两种求解恰当方程时是常用的解法.

解法 1. 从 (2.20) 第一式 $U_x = M$ 出发，有

$$U(x,y) \equiv \int M(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(y) = \frac{x^2}{2}y + \varphi(y), \tag{2.25}$$

其中 $\varphi(y)$ 待定. 再利用 (2.20) 第二式 $U_y = N$, 有

$$\frac{x^2}{2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y} \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{y}.$$

从而

$$\varphi(y) = \ln|y|,$$

这里省略了积分常数，因为只需求出一个 $U(x,y)$ 即可. 把它代入 (2.25) 便得

$$U = \frac{x^2}{2}y + \ln|y|.$$

也可以从 (2.20) 第二式 $U_y = N$ 出发;

$$U(x,y) \equiv \int N(x,y)\mathrm{d}y + \psi(x) = \frac{x^2}{2}y + \ln|y| + \psi(x), \tag{2.26}$$

其中 $\psi(x)$ 待定. 再利用 (2.20) 第一式 $U_x = M$, 有

$$xy + \psi'(x) = xy \Rightarrow \psi'(x) = 0.$$

从而取 $\psi(x) = 0$ 也可以得到上面的表达式 $U(x,y)$.

解法 1. 从 (2.24) 出发重新组合求出原函数 $U(x,y)$: 注意到

$$(2.24) = \left(xy\mathrm{d}x + \frac{x^2}{2}\mathrm{d}y\right) + \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}y + \ln|y|\right).$$

则

$$U \equiv \frac{x^2}{2}y + \ln|y|.$$

总之，方程 (2.24) 的隐式通解为

$$U \equiv \frac{x^2}{2}y + \ln|y| = C.$$

□

五. 习题

解下列方程:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(1-ye^{x^2})}{e^{x^2}}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\cos^2 y}{1+x^2\sin 2y}$.

六. 作业

第 21 页:第 1 题 (1), (3).