§3　解题的灵活性

3.1　引进适当变换

讲授内容：如何引进适当的变换将非典型方程化为典型方程.
教学重点：根据方程特点引进适当的变换.
讲授学时：　2 学时

一. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x} + f(xy)$ 的方程.

方法：引进变换 $u = xy$, 则方程化为关于 u 的变量可分离方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = xf(u).$$

例 3.1 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{x} + 4x^2y^2 + 1 = 0.$$

解　令 $u = xy$, 便得到变量可分离方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -x(1 + 4u^2).$$

解之，再代回，可得到原方程的通解

$$y = -\frac{1}{2x}\tan(x^2 + C).$$

□

二. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x) + q(x)e^{ay}$ 的方程，其中常数 $a \neq 0$.

方法：　令 $u = e^{ay}$, 则得到关于 u 的伯努利方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = ap(x)u + aq(x)u^2.$$

例 3.2 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}(x^2e^y - 1).$$

解　令 $u = e^y$, 得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}(x^2u^2 - u).$$

解之，再代回，便得到原方程的通解

$$y = -\ln(Cx - x^2).$$

□

三. 形如 $\frac{dy}{dx} = xf(ax + b\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}$ 的方程，其中 a, b 是常数.

方法： 令 $u = \frac{y}{x}$. 则方程化为 §2 中考虑过的类型：

$$\frac{du}{dx} = f(ax + bu).$$

例 3.3 解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + y)^2 + y}{x}.$$

解 此方程可以改写为

$$\frac{dy}{dx} = x\left(x + \frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}.$$

经变换 $u = \frac{y}{x}$ 可化成

$$\frac{du}{dx} = (x + u)^2.$$

它是一个可化为齐次方程的方程．解之，再代回，可得到原方程的通解

$$y = x\mathrm{tg}(x + C) - x^2.$$

□

四. 形如 $\frac{dy}{dx} = lx\sqrt{ax^4 + bx^2 + cy}$ 的方程，其中 $a > 0, b, c, l$ 都是常数.

方法： 先降低根式中 x 的次数．令 $t = x^2$, 得

$$2\frac{dy}{dt} = l\sqrt{at^2 + bt + cy}.$$

再令 $u = \sqrt{at^2 + bt + cy}$. 于是，

$$2u\frac{du}{dt} = 2at + \frac{cl}{2}u + b,$$

即

$$\frac{du}{dt} = \frac{2at + \frac{cl}{2}u + b}{2u}.$$

这是一个可化为齐次方程的方程.

例 3.4 解方程

$$\frac{dy}{dx} = 6x\sqrt{x^4 + y}.$$

解 按照上面的作法，可将方程化为齐次方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{2t+3u}{2u}.$$

解之，再代回，便可得到原方程的隐式通解：

$$(\sqrt{x^4+y}-2x^2)^4\cdot(2\sqrt{x^4+y}+x^2)=C.$$

□

五. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ay^l+bx^{\frac{l}{1-l}}$ 的方程，其中 a,b,l 都是常数， $abl\neq 0, l\neq 1$.

方法： 令 $y=u^m$, m 待定，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{au^{ml}+bx^{\frac{l}{1-l}}}{mu^{m-1}}.$$

若取 m 使得 $ml=m-1$, 即 $m=\frac{1}{1-l}$, $m-1=\frac{l}{1-l}$, 则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(1-l)a+\frac{(1-l)bx^{\frac{l}{1-l}}}{u^{\frac{l}{1-l}}},$$

它是一个齐次方程.

例 3.5 解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2-\frac{2}{x^2}.$$

解法一 这里 $l=2$, $\frac{l}{1-l}=-2$. 因此我们取 $m=-1$. 通过变换 $y=\frac{1}{u}$, 方程变为齐次方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\left(\frac{u}{x}\right)^2-1.$$

解之，再代回，得

$$y=\frac{1-2Cx^3}{x+Cx^4}.$$

□

解法二 观察出原方程有一特解 $y=\frac{1}{x}$. 因此作变换

$$y=u+\frac{1}{x}.$$

于是原方程化为伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2+\frac{2}{x}u.$$

解之，再代回，同样可得出原方程的通解. □

六. 习题

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{3}y^3-y+x^3+1}{x(1-y^2)}$;
(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\mathrm{tg}(x+y)-1$.

七. 作业

第 24 页：第 1 题 (1), (13), (15).