3.4 寻找积分因子

讲授内容：利用寻找积分因子法来求解方程.
教学重点：如何寻找微分方程的积分因子将方程化为恰当方程.
讲授学时： 3 学时

一. 积分因子的定义及判别

对于微分形式的微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{3.1}$$

如果存在函数 $\mu(x,y) \not\equiv 0$ 使得方程

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x + \mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

是一恰当方程，则称 $\mu(x,y)$ 是方程 (3.1) 的 **积分因子**.

如果函数 $M = M(x,y), N = N(x,y)$ 和 $\mu = \mu(x,y)$ 都是连续可微的，则由恰当方程的判别准则知道， $\mu(x,y)$ 为 (3.1) 的积分因子的充要条件是

$$(\mu M)_y \equiv (\mu N)_x,$$

即

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = (M_y - N_x)\mu. \tag{3.2}$$

二. 积分因子的求法

方程 (3.2) 的非零解总是存在的，但求解却很困难. 我们就某些特殊情形给出求积分因子的结果.

定理 3.1 *设函数 $M = M(x,y), N = N(x,y)$ 和 $\varphi = \varphi(x,y)$ 均于域 : $a < x < b, \alpha < y < \beta$ 连续可微. 则方程 (3.1) 有形如 $\mu = \mu(\varphi(x,y))$ 的积分因子的充要条件是：函数*

$$\frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)\varphi_x(x,y) - M(x,y)\varphi_y(x,y)} \tag{3.3}$$

仅是 $\varphi(x,y)$ 的函数. 此外，如果 (3.3) 仅是 $\varphi(x,y)$ 的函数 $g = g(\varphi(x,y))$, 而 $G(u) = \int g(u)\mathrm{d}u$, 则函数

$$\mu = e^{G(\varphi(x,y))} \tag{3.4}$$

就是方程 (3.1) 的积分因子.

证明 因为如果方程 (3.1) 有积分因子 $\mu = \mu(\varphi)$, 则由 (3.2) 进一步知

$$(M\varphi_y - N\varphi_x)\mu' = (N_x - M_y)\mu,$$

即

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N\varphi_x - M\varphi_y}.$$

上式左端是 φ 的函数，可见上式右端，即 (3.3) 也仅是 φ 的函数．反之，如果 (3.3) 仅是 φ 的函数，则函数 (3.4) 是方程 (3.2) 的解．事实上，因为

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = (N\varphi_x - M\varphi_y)g(\varphi)e^{G(\varphi)} = (M_y - N_x)\mu.$$

这时函数 (3.4) 确是方程 (3.1) 的积分因子． □

三．积分因子表

为了方便应用这个定理，我们就若干特殊情形列简表如下：

类　型	条　件	积 分 因 子
$\mu(x)$	$\frac{M_y-N_x}{N} \equiv g(x)$	$e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$
$\mu(y)$	$\frac{M_y-N_x}{-M} \equiv g(y)$	$e^{\int g(y)\mathrm{d}y}$
$\mu(x^\alpha y^\beta)$	$\frac{M_y-N_x}{\alpha x^{-1}N-\beta y^{-1}M}\cdot\frac{1}{x^\alpha y^\beta} \equiv g(x^\alpha y^\beta)$	$e^{\int g(u)\mathrm{d}u}\big\vert_{u=x^\alpha y^\beta}$
$\mu(\varphi(x,y))$	$\frac{M_y-N_x}{N\varphi_x-M\varphi_y} \equiv g(\varphi(x,y))$	$e^{\int g(u)\mathrm{d}u}\big\vert_{u=\varphi(x,y)}$

四．例题

例 3.9 解方程

$$(y^2 - 3xy + 1)\mathrm{d}x + (xy - x^2)\mathrm{d}y = 0.$$

解　这里 $M = y^2 - 3xy + 1, N = xy - x^2$. 注意

$$M_y - N_x = y - x.$$

所以方程不是恰当的．但是

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x},$$

它仅依赖于 x, 因此有积分因子

$$\mu \equiv e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} = x.$$

以它乘方程得到

$$(xy^2 - 3x^2y + x)\mathrm{d}x + (x^2y - x^3)\mathrm{d}y = 0.$$

从而可得到隐式通解

$$U \equiv \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{1}{2}x^2 = C.$$

□

例 3.10 解方程

$$(xy + y^2)\mathrm{d}x + (xy + y + 1)\mathrm{d}y = 0.$$

解 这里 $M = xy + y^2, N = xy + y + 1$. 方程不是恰当的．但是

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = -\frac{1}{y},$$

它仅依赖于 y, 因此有积分因子

$$\mu \equiv e^{-\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}.$$

以它乘方程得到

$$(x + y)\mathrm{d}x + \left(x + 1 + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0.$$

从而可得到隐式通解

$$U \equiv \frac{1}{2}x^2 + xy + y + \ln|y| = C.$$

另外，还有特解 $y = 0$. 它是在用积分因子乘方程时丢失的解. □

例 3.11 解方程

$$(y^2 + 2x^2y)\mathrm{d}x + (xy + x^3)\mathrm{d}y = 0.$$

解 这里 $M = y^2 + 2x^2y, N = xy + x^3$, 不是恰当方程．设想方程有积分因子 $\mu = \mu(x^\alpha y^\beta)$, 其中 α, β 是待定实数．于是

$$\frac{M_y - N_x}{\alpha x^{-1}N - \beta y^{-1}M} \cdot \frac{1}{x^\alpha y^\beta} = \frac{y - x^2}{(\alpha - \beta)y + (\alpha - 2\beta)x^2} \cdot \frac{1}{x^\alpha y^\beta} = \frac{1}{x^\alpha y^\beta},$$

只须取 $\alpha = 3, \beta = 2$. 由上述简表知原方程有积分因子

$$\mu = x^3y^2.$$

从而容易求得其通解为:

$$U \equiv \frac{1}{4}x^4y^4 + \frac{1}{3}x^6y^3 = C.$$

□

五. 积分因子的其它求法

以例 3.11 为例，方程的积分因子也可以这样来求：把原方程改写为如下两组之和的形式：

$$(y^2\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y) + (2x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y) = 0.$$

前一组有积分因子 $\mu_1 = \frac{1}{y}$, 并且

$$\frac{1}{y}(y^2\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(xy).$$

后一组有积分因子 $\mu_2 = \frac{1}{x}$, 并且

$$\frac{1}{x}(2x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(x^2y).$$

设想原方程有积分因子

$$\mu = \frac{1}{y}(xy)^\alpha = \frac{1}{x}(x^2y)^\beta,$$

其中 α, β 是待定实数. 容易看出只须取 $\alpha = 3, \beta = 2$, 上述函数就确实是积分因子，它其实就是上面找到的那一个.

例 3.12 解方程

$$M_1(x)M_2(y)\mathrm{d}x + N_1(x)N_2(y)\mathrm{d}y = 0,$$

其中 M_1, M_2, N_1, N_2 均为连续函数.

解 这里 $M = M_1(x)M_2(y), N = N_1(x)N_2(y)$. 写成微商形式就知至少在形式上方程是变量可分离方程. 若有 y_0 使得 $M_2(y_0) = 0$, 则 $y = y_0$ 是此方程的解；若有 x_0 使得 $N_1(x_0) = 0$, 则 $x = x_0$ 是此方程的解；若 $M_2(y)N_1(x) \neq 0$, 则有积分因子

$$\mu = \frac{1}{M_2(y)N_1(x)},$$

并且通解为

$$U \equiv \int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\mathrm{d}y.$$

□

六. 作业

第 30 页：第 1 题 (2), (11); 第 2 题；第 3 题.