§4 一阶隐方程，高阶方程与里卡蒂方程

4.1 一阶隐方程

讲授内容：一阶隐方程的求解.
教学重点：求解一阶隐方程的步骤与方法.
讲授学时： 3 学时

一. 一阶隐方程的定义及求解步骤

一阶隐方程:

$$F(x,y,y')=0. \tag{4.1}$$

求解步骤:

1. 建立参数表示. 把 (4.1) 看成 (x,y,y') 空间的某个曲面，设此曲面有参数表示:

$$x=\varphi(s,t),\quad y=\psi(s,t),\quad y'=\kappa(s,t), \tag{4.2}$$

其中 s 和 t 是参数.

2.利用微分式 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$. 将

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x&=\varphi_s\mathrm{d}s+\varphi_t\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}y&=\psi_s\mathrm{d}s+\psi_t\mathrm{d}t,\\ y'&=\kappa(s,t)\end{aligned}$$

代入 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$, 得到方程:

$$(\psi_s-\kappa\varphi_s)\mathrm{d}s+(\psi_t-\kappa\varphi_t)\mathrm{d}t=0. \tag{4.3}$$

3. 求解方程 (4.3). 设其通解为 $s=\omega(t,c)$ 或 $t=\omega(s,c)$. 代入 (4.2) 的前两式便得到 (4.1) 的参数形式的通解

$$x=\varphi(\omega(t,c),t),\quad y=\psi(\omega(t,c),t),$$

或

$$x=\varphi(s,\omega(s,c)),\quad y=\psi(s,\omega(s,c)).$$

二. 几种特殊形式方程的求解

I. 如果方程 (4.1) 可以按 y' 解出:

$$y'=\kappa(x,y),$$

这时在参数表示 (4.2) 中可取 $\varphi(s,t)=s$, $\psi(s,t)=t$. 这种方程的解法在前两节中我们已经讨论过.

II. 如果方程 (4.1) 可以按 y 解出：

$$y=\psi(x,y'),$$

这时在参数表示 (4.2) 中可取 $\varphi(s,t)=s$, $\kappa(s,t)=t$. 这种方程的求解框架可以归纳如下：

令 $y'=p$(习惯上用参数 p 而不用 t), 得到

$$y=\psi(x,p). \tag{4.4}$$

两端对 x 求导并以 p 代替 y', 得

$$p=\psi_x(x,p)+\psi_p(x,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

然后解此方程. 若能求得这一方程的通解 $p=\omega(x,c)$, 代入 (4.4) 便可得到原方程的通解：

$$y=\psi(x,\omega(x,c));$$

若得到的是隐式通解 $\Phi(x,p,c)=0$, 则由此可得到原方程的参数形式通解：

$$\Phi(x,p,c)=0,\quad y=\psi(x,p).$$

III. 如果方程 (4.1) 可以按 x 解出：

$$x=\varphi(y,y'),$$

这时在参数表示 (4.2) 中可取 $\psi(s,t)=s$, $\kappa(s,t)=t$. 这种方程的求解框架可以归纳如下：

令 $y'=p$, 得到

$$x=\varphi(y,p). \tag{4.5}$$

两端对 y 求导，并以 $\frac{1}{p}$ 替代 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, 得

$$\frac{1}{p}=\varphi_y(y,p)+\varphi_p(y,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

再解此方程. 若得到通解 $p=\omega(y,c)$, 代入 (4.5) 便得到原方程的隐式通解

$$x=\varphi(y,\omega(y,c));$$

若得到的是隐式通解 $\Phi(y,p,c)=0$, 则由此可得到原方程的参数形式通解：

$$x=\varphi(y,p),\quad \Phi(y,p,c)=0.$$

IV. 如果方程 (4.1) 中不显含 y:

$$F(x,y')=0,$$

这时在参数表示 (4.2) 中可取 $x=\varphi(s)$, $y=t$, $y'=\kappa(s)$. 方程的求解框架可以归纳如下：

将此参数表示代入 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$ 中，得到

$$\mathrm{d}y=\kappa(s)\varphi'(s)\mathrm{d}s.$$

由此知

$$y=\int\kappa(s)\varphi'(s)\mathrm{d}s+c,$$

故原方程的参数形式通解为：

$$x=\varphi(s),\quad y=\int\kappa(s)\varphi'(s)\mathrm{d}s+c.$$

V. 如果方程 (4.1) 中不显含 x:

$$F(y,y')=0,$$

这时在参数表示 (4.2) 中可取 $x=s$, $y=\psi(t)$, $y'=\kappa(t)$. 方程的求解框架可以归纳如下：

将此参数表示代入 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$ 中，得到

$$\psi'(t)\mathrm{d}t=\kappa(t)\mathrm{d}x.$$

由此知

$$x=\int\frac{\psi'(t)}{\kappa(t)}\mathrm{d}t+c,$$

故原方程的参数形式通解为：

$$x=\int\frac{\psi'(t)}{\kappa(t)}\mathrm{d}t+c,\quad y=\psi(t).$$

三. 例题

例 4.1 解方程

$$y'=e^{\frac{xy'}{y}}. \tag{4.6}$$

解 此方程若按 y 解出：

$$y = xy'(\ln y')^{-1},$$

则它的求解可以如下进行.

令 $y' = p$, 得

$$y = xp(\ln p)^{-1}. \tag{4.7}$$

两边对 x 求导，并以 p 代替 y', 得到

$$p = p(\ln p)^{-1} + x(\ln p)^{-1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - x(\ln p)^{-2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

整理得

$$(1 - \ln p)(x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - p\ln p) = 0.$$

从 $1 - \ln p = 0$ 得 $p = e$, 代入 (4.7) 得到原方程的一个特解：

$$y = ex.$$

从 $x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - p\ln p = 0$ 解得 $p = e^{cx}$, 代入 (4.7) 便得到原方程的通解：

$$y = \frac{1}{c}e^{cx}.$$

方程 (4.6) 若按 x 解出：

$$x = (y')^{-1}y\ln y',$$

则它的求解可以这样进行：

令 $y' = p$, 得

$$x = yp^{-1}\ln p. \tag{4.8}$$

两边对 y 求导，并以 $\frac{1}{p}$ 代替 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, 得

$$p^{-1} = p^{-1}\ln p + (yp^{-2} - yp^{-2}\ln p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

整理得

$$(1 - \ln p)(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p) = 0.$$

从 $1 - \ln p = 0$ 得 $p = e$, 代入 (4.8) 得到原方程的一个特解：

$$x = e^{-1}y.$$

从 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p = 0$ 得 $p = cy$, 代入 (4.8) 得到原方程的通解：

$$x = \frac{1}{c}\ln(cy).$$

□

例 4.2 解方程

$$x^3 + y'^3 - xy' = 0.$$

解　设想 $y' = tx$, 这时有

$$x^3 + t^3x^3 - tx^2 = 0.$$

由此得到

$$x = \frac{t}{1+t^3}.$$

故原方程有参数表示:

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y' = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

代入 $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$, 得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \frac{t^2}{1+t^3} \cdot \frac{1+t^3-3t^3}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t = \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t, \\ y &= \int \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t + c = \frac{1+4t^3}{6(1+t^3)^2} + c. \end{aligned}$$

故原方程参数形式的通解为:

$$x = \frac{t}{1+t^3}, \quad y = \frac{1+4t^3}{6(1+t^3)^2} + c.$$

□

例 4.3 解方程

$$y^2(y'-1) = (2-y')^2.$$

解　设想 $2 - y' = yt$. 这时有

$$y^2(y'-1) = y^2t^2.$$

由此可以得到方程的参数表示:

$$y' = 1+t^2, \quad y = \frac{1}{t} - t.$$

代入 $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$, 得到

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{t^2} - 1\right)\mathrm{d}t &= (1+t^2)\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{1+t^2}\left(-\frac{1}{t^2} - 1\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

故原方程的参数形式通解为

$$x = \frac{1}{t} + c, \quad y = \frac{1}{t} - t.$$

或消去 t, 通解可以写为

$$y = x - c - \frac{1}{x - c}. \qquad \square$$

四. 习题

解下列方程：

(1) $y = (y' - 1)e^{y'}$;

(2) $y'(x + y + \ln y') = 1$.

五. 作业

第 35 页：第 1 题 (1), (10); 第 3 题.