4.2　高阶方程的几种可积类型

讲授内容：高阶方程的几种可积类型的解法.
教学重点：高阶方程的几种可积类型的解法.
讲授学时：　2 学时

一．高阶方程的降阶法

我们考虑高阶方程

$$F(x, y^{(n-2)}, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 2$$

中的几类特殊情形.

降阶法：逐步降低方程的阶的办法，也就是首先令 $z = y^{(n-2)}$, 将方程化成二阶方程

$$F(x, z, z', z'') = 0. \tag{4.9}$$

二．几种特殊方程的求解

1.如果 (4.9) 中不显含自变量 x, 即 (4.9) 形如

$$F(z, z', z'') = 0, \tag{4.10}$$

则令 $z' = u$ 并注意到

$$z'' = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = u\frac{du}{dz}.$$

于是方程 (4.10) 化成一阶隐方程

$$F(z, u, u\frac{du}{dz}) = 0. \tag{4.11}$$

2.如果 (4.9) 中不显含未知函数 z, 即 (4.9) 形如

$$F(x, z', z'') = 0,$$

则令 $z' = u$ 此方程即化成一阶隐方程

$$F(x, u, u') = 0.$$

3.如果 (4.9) 中 F 关于变量 z, z', z'' 是 m 次齐次函数, 即

$$F(x, tz, tz', tz'') = t^m F(x, z, z', z''),$$

则令 $z' = uz$, 其中 $u = u(x)$ 是新的未知函数．注意到

$$z'' = u'z + uz' = (u' + u^2)z.$$

由齐次性有

$$F(x,z,z',z'') \equiv z^m F(x,1,u,u'+u^2),$$

故经变换 $z' = uz$ 方程 (4.9) 可化成一阶隐方程

$$F(x,1,u,u'+u^2) = 0.$$

4.如果 (4.9) 中 F 关于其变量是广义齐次的, 即有实数 m 和 k, 使得

$$F(tx, t^m z, t^{m-1}z', t^{m-2}z'') = t^k F(x,z,z',z''),$$

则令 $x = e^t, z = ue^{mt}$, 其中 t 是新的自变量， $u = u(t)$ 是新的未知函数．注意到

$$z' = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{(m-1)t}(u' + mu),$$

$$z'' = \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{(m-2)t}(u'' + (2m-1)u' + m(m-1)u).$$

利用广义齐次性, 方程 (4.9) 可化成前面已经讨论过的不显含自变量的二阶方程:

$$F(1,u,u'+mu,u''+(2m-1)u'+m(m-1)u) = 0.$$

注 4.1 高阶方程通过降阶化成一阶方程求解时, 如果求出的是参数形式解, 例如方程 *(4.11)* 求出参数形式通解为

$$u = \varphi_1(t,c_1), \quad z = \varphi_2(t,c_1),$$

则可如下求出原方程的通解：代回原变量,

$$y^{(n-1)} = \varphi_1(t,c_1), \quad y^{(n-2)} = \varphi_2(t,c_1).$$

再利用微分式 $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$ 就有

$$\varphi_2'(t,c_1)dt = \varphi_1(t,c_1)dx.$$

直接积分，得到

$$x = \int \frac{\varphi_2'(t,c_1)}{\varphi_1(t,c_1)}dt + c_2 \equiv \psi(t,c_1,c_2).$$

如果 $n = 2$, 则已得到方程的参数形式通解：

$$x = \psi(t,c_1,c_2), \quad y = y^{(n-2)} = \varphi_2(t,c_1).$$

如果 $n > 2$, 则继续利用微分式 $dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}dx$, 得到

$$dy^{(n-3)} = \varphi_2(t,c_1)\psi'(t,c_1,c_2)dt.$$

从而

$$y^{(n-3)} = \int \psi_2(t;c_1)\varphi'(t;c_1;c_2)dt + c_3 \equiv \psi_3(t;c_1;c_2;c_3).$$

如此继续下去，最后可得到原方程的参数形式通解：

$$x = \varphi(t;c_1;c_2);\quad y = \psi_n(t;c_1;\cdots;c_n).$$

三. 例题

例 4.4 解方程

$$2yy'' = 1.$$

解 方程中不显含自变量 x. 由于

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = y'\frac{dy'}{dy};$$

原方程可改写为

$$2yy'\frac{dy'}{dy} = 1.$$

它是变量可分离方程. 解之，得

$$y = c_1e^{y'^2};\quad c_1 \neq 0.$$

这是按 y 解出的方程，它的参数形式通解为：

$$x = 2c_1\int e^{p^2}dp + c_2;\quad y = c_1e^{p^2}.$$

例 4.5 解方程：

$$|y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}| = a;$$

其中 a 是正常数.

解 记 $r = \pm a$, 上述方程可改写为

$$y''(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}} = r;$$

即

$$dx = r^{-1}(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}dy'.$$

两边积分，得到

$$x = r^{-1}(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}} + c_1.$$

它是一个已按 x 解出的一阶方程. 令 $y^0 = p$, 得

$$x = r \ ^1p(1 + p^2) \ ^{\frac{1}{2}} + c_1:$$

对 y 求导并以 $p \ ^1$ 代替 $\frac{dx}{dy}$, 得

$$p \ ^1 = r \ ^1(1 + p^2) \ ^{\frac{3}{2}}\frac{dp}{dy};$$

即

$$dy = r \ ^1(1 + p^2) \ ^{\frac{3}{2}}pdp:$$

积分，得

$$y = \quad r \ ^1(1 + p^2) \ ^{\frac{1}{2}} + c_2:$$

故原方程有参数形式通解：

$$x = r \ ^1p(1 + p^2) \ ^{\frac{1}{2}} + c_1; \quad y = \quad r \ ^1(1 + p^2) \ ^{\frac{1}{2}} + c_2:$$

消去参数 p 可得隐式通解：

$$(x \quad c_1)^2 + (y \quad c_2)^2 = a \ ^2:$$

例 4.6 解方程

$$xyy^{00} \quad yy^0 \quad xy^{02} = 0:$$

解 此方程左端是关于变量 $y; y^0; y^{00}$ 的二次齐次函数. 因此为了求解，作变换

$$y^0 = uy; \tag{4.12}$$

其中 $u = u(x)$ 是新的未知函数. 注意到 $y^{00} = (u^0 + u^2)y$. 于是原方程化成

$$xu^0 = u:$$

它是一阶线性方程. 解之，得

$$u = 2c_1x:$$

代入 (4.12) 再解出 y, 便得到原方程的通解

$$y = c_2e^{c_1x^2}:$$

例 4.7 解方程

$$2x^2yy^{00} \quad 6xyy^0 + 8y^2 \quad x^4 = 0:$$

$F(x; y; y'; y'')$. m,

$$F(tx; t^m y; t^{m\ 1} y'; t^{m\ 2} y'') = t^{2m}(2x^2 yy'' \quad 6xyy' + 8y^2) \quad t^4 x^4;$$

$m = 2; k = 4$, $t^k F(x; y; y'; y'')$.

$$x = e^t; \quad y = ue^{2t};$$

t $u = u(t)$

$$y' = \frac{dy}{dt}\ \frac{dt}{dx} = e^t(u' + 2u);$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\ \frac{dt}{dx} = u'' + 3u' + 2u:$$

$$2uu'' = 1:$$

4.4

$$t = 2c_1 \int e^{p^2} dp + c_2; \quad u = c_1 e^{p^2};$$

$$x = \exp\ 2c_1 \int e^{p^2} dp + c_2 \ ; \quad y = c_1 \exp\ p^2 + 4c_1 \int e^{p^2} dp + 2c_2 \ :$$

(1) $yy'' \quad y'^2 = 0$;
(2) $x + y'' \quad y''' \ \ln y''' = 0$.

39 1 (2), (4), (8).