4.3 里卡蒂方程

讲授内容：里卡蒂方程的定义及特殊方程的求解.
教学重点：里卡蒂方程的求解比较困难，我们尝试对特殊方程给出解法.
讲授学时： 1 学时

一. 里卡蒂方程的定义及解法

里卡蒂方程:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{4.13}$$

其中 $p(x) \not\equiv 0, r(x) \not\equiv 0$.

只要 $b(x) \not\equiv 0$, 二阶齐次线性方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

经变换

$$y' = -uy$$

便可化成里卡蒂方程

$$u' = u^2 - a(x)u + b(x).$$

解法:

对里卡蒂方程 (4.13), 如果能得到它的一个解 $y = \varphi(x)$, 则经变换

$$y = u + \varphi(x)$$

后可化成能求解的伯努利方程:

$$u' = p(x)u^2 + (2p(x)\varphi(x) + q(x))u.$$

二. 一类特殊的里卡蒂方程

对于里卡蒂方程

$$y' = y^2 + rx^\alpha, \tag{4.14}$$

其中 r, α 是实数， $r \neq 0$, 早在 1724 年伯努利证明了：当

$$\alpha = \frac{4k}{1-2k}, \quad k = 0, \pm1, \cdots, \pm\infty, \tag{4.15}$$

即 $\frac{\alpha}{2\alpha+4}$ 是整数或无穷时，可以通过有限次变换化成变量可分离方程，从而能用初等积分法求解. 但是 1841 年刘维尔证明了：当 α 不取 (4.15) 这样的值，即 $\frac{\alpha}{2\alpha+4}$ 不是整数或无穷时，方程 (4.14) 肯定不能用初等积分法求解.

三. 习题

解下列方程：
(1) $x^4y' + y^2 = 4x^6$;
(2) $y' + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2} = 0$.

四. 作业

第 41 页：第 1 题 (2), (4).