§1 引言

在第一章中，我们介绍了解微分方程的一些初等积分法，利用这些方法，人们可以求得方程的通解表达式．然而，如我们在第一章 §4 中所指出，能用初等积分法解出的微分方程是很少的．这就迫使人们将主要注意力转移到直接根据方程的结构以及出现在方程中的函数的性质去探索解的各种性质，建立方程的各种理论．本章和第四，五章所要讲述的就是沿着这个方向建立的基本理论和基本方法．

本章研究一类具有特殊结构的方程，称为线性方程．这类方程，虽然结构简单，一般却不能用初等积分法求得它的通解表达式．然而，人们却可直接根据方程的特点，从理论上推断它的通解具有简单而清晰的结构．这一重要事实不仅是线性方程理论的基石，在非线性方程的研究中也有着重要的应用．

由于高阶微分方程式总可以化成一阶微分方程组 (见第一章 §1), 本章将首先研究一阶线性微分方程组, 然后将一阶线性微分方程组的结果应用到高阶线性微分方程式上．所谓 **一阶线性微分方程组** 是指形如

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

的方程组，它的右端是 $x_1, \cdots, x_n$ 的线性函数，这里 $a_{ij}, f_i, i, j = 1, \cdots, n$ 都是区间 I 上的已知函数．

为了书写方便，引进向量和矩阵记号．记

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

则方程组 (1.1) 可以简写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x + f(t), \tag{NH}$$

其中 $A(t)$ 和 $f(t)$ 分别称为 **系数矩阵** 和 **非齐次项**．当非齐次项 $f(t) \equiv 0$ 时，(NH) 变成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x, \tag{LH}$$

它称为 **齐次线性微分方程组**．而当非齐次项 $f(t) \not\equiv 0$, 即 $f_i(t), i = 1, \cdots, n$ 不都恒为零时， (NH) 称为 **非齐次线性微分方程组**．

初值条件

$$x_i(t_0) = \xi_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

也可简记为

$$x(t_0) = \xi, \tag{1.2}$$

其中 ξ 是 n 维列向量，即向量 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 的转置. 以后凡谈到向量，都是指列向量.

为了便于对写成向量和矩阵形式的微分方程组 (NH) 进行讨论，我们引进一些记号和概念.

称一矩阵 (包括作为特殊矩阵的向量) 函数是 **连续** (或 **可微**, 或 **连续可微**, 等等) 的，指的是它的每一个元素都是连续 (或可微，或连续可微，等等) 的；一矩阵函数的 **导数**(或 **积分**, 或 **极限**), 是指这样一个矩阵函数，它的各个元素是原矩阵的相应元素的导数 (或积分，或极限); 称一矩阵函数序列是 **收敛**(或 **在区间** I **上一致收敛**) 的，指的是它的每一个相应元素作成的序列是收敛 (或在区间 I 上一致收敛) 的.

如果

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则记

$$|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

而依次称为向量 x 和矩阵 A 的 **模**, 也称为 **范数**. 从定义出发，容易推出如下几个不等式：

I. $|Ax| \le |A| \cdot |x|$.

II. 若 B 也是 $n \times n$ 矩阵，则 $|AB| \le |A| \cdot |B|$; 特别对任意自然数 m, 有 $|A^m| \le |A|^m$.

III. 三角不等式：若 y 也是 n 维列向量，则 $|x + y| \le |x| + |y|$.

IV. 若 $x(t)$ 是 n 维向量，于 $a \le t \le b$ 上连续，则

$$\left| \int_a^b x(t) \mathrm{d}t \right| \le \int_a^b |x(t)| \mathrm{d}t.$$

习　题

1. 从定义出发推导不等式 I-IV.