§2 解的存在性与唯一性

对于一个不能用初等积分法求解的微分方程，首要问题是，它是否有解？更明确地说，是否有满足给定初值条件的解？进而还要问：满足给定初值条件的解是否唯一？这些问题得不到满意的回答，就很难再谈关于这一方程的其它研究．下面的定理就线性方程组 (NH) 的情形对上述问题给出了完满的回答，它是线性微分方程理论的基础．

定理 2.1 *设 $A(t)$ 和 $f(t)$ 均于区间 I 连续．则对任一 $t_0 \in I$ 和任意 n 维常向量 ξ，方程组 (NH) 恒有定义在整个区间 I 上且满足初值条件 (1.2) 的解．此外，方程组 (NH) 也只能有一个解满足初值条件 (1.2).*

证明 这个定理的证明较长，我们分 4 步完成．

1. 把初值问题 (NH), (1.2) 化成下述等价的积分方程组：

$$x(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} (A(s)x(s) + f(s))\mathrm{d}s, \tag{2.1}$$

等价的意思是：如果 $x = \varphi(t)$ 是初值问题 (NH), (1.2) 的解，则它是积分方程组 (2.1) 的连续解；反之，如果 $x = \varphi(t)$ 是积分方程组 (2.1) 的连续解，则它必是初值问题 (NH), (1.2) 的解．这样一来，我们就只须证明：积分方程组 (2.1) 在区间 I 上有连续解，且只能有一个连续解．

2. 用逐步逼近法构造 **皮卡**(Picard, 1856-1941)**序列**, 即序列

$$\begin{aligned} &\varphi_0(t) = \xi, \\ &\varphi_k(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} (A(s)\varphi_{k-1}(s) + f(s))\mathrm{d}s, \quad k = 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{2.2}$$

用数学归纳法容易证明， $\varphi_k(t), k = 1, 2, \cdots$ 于区间 I 上有定义且连续．

3. 证明序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 于区间 I 内部一致收敛 (即于 I 的任意有限闭子区间上一致收敛), 且其极限函数是积分方程组 (2.1) 在区间 I 上的连续解．

事实上，假设 I_1 是 I 的一个任意给定的有限闭子区间，且 $t_0 \in I_1$．由序列与级数的关系知，只须证明无穷级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t)) \tag{2.3}$$

于 I_1 上一致收敛．以 K 表示 $|A(t)|$ 和 $|A(t)\xi + f(t)|$ 在 I_1 上的一个公共上界．于是当 $t \in I_1$ 时

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} (A(s)\xi + f(s))\mathrm{d}s \right| \le K|t - t_0|.$$

用数学归纳法容易证明，对任意自然数 m, 有

$$|\varphi_m(t)-\varphi_{m-1}(t)| \leq \frac{K^m|t-t_0|^m}{m!}, \quad t \in I_1.$$

由此即见无穷级数 (2.3), 从而序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 于 I_1 上一致收敛. 显然每一个 $\varphi_k(t)$ 都在 I_1 上连续，因此序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 的一致极限 $\varphi(t)$ 也在 I_1 上连续. 在 (2.2) 中令 $k \to \infty$, 根据 $\{\varphi_k(t)\}$ 的一致收敛性，就得到

$$\varphi(t)=\xi+\int_{t_0}^{t}(A(s)\varphi(s)+f(s))\mathrm{d}s, \quad t \in I_1,$$

即 $x=\varphi(t)$ 是积分方程组 (2.1) 在 I_1 上的一个连续解. 既然 $\{\varphi_k(t)\}$ 在 I 的任何含 t_0 的有限闭子区间上都一致收敛，特别它就在 I 上处处收敛，其极限函数仍记为 $\varphi(t)$. 函数 $\varphi(t)$ 既然在 I 的任何含 t_0 的闭子区间上是 (2.1) 的连续解，它当然在整个 I 上也是如此.

4. 最后证明唯一性，即证明：如果 $x=\psi(t)$, 在区间 $I_0 \subset I$ 上也是 (2.1) 的连续解，且 $t_0 \in I_0$, 则在 I_0 上必有

$$\psi(t) \equiv \varphi(t). \tag{2.4}$$

为此, 设 I_1 为 I_0 的任一有限闭子区间, 且 $t_0 \in I_1$, 以 N 表示 $|A(t)|$ 和 $|\psi(t)-\varphi(t)|$ 在 I_1 上的一个公共上界. 由 (2.1) 知，当 $t \in I_1$ 时

$$\begin{aligned} |\psi(t)-\varphi(t)| &\equiv \left|\int_{t_0}^{t}A(s)(\psi(s)-\varphi(s))\mathrm{d}s\right| \\ &\leq N\left|\int_{t_0}^{t}|\psi(s)-\varphi(s)|\mathrm{d}s\right|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

于是我们有

$$|\psi(t)-\varphi(t)| \leq N^2|t-t_0|, \quad t \in I_1.$$

把它代入 (2.5) 右端，进而得到

$$|\psi(t)-\varphi(t)| \leq \frac{N^3|t-t_0|^2}{2!}, \quad t \in I_1.$$

用数学归纳法容易证明，对任意自然数 m, 有

$$|\psi(t)-\varphi(t)| \leq \frac{1}{m!}N^{m+1}|t-t_0|^m, \quad t \in I_1.$$

令 $m \to \infty$, 即见 (2.4) 于 I_1 上成立. 由 I_1 的任意性就知 (2.4) 必在 I_0 上成立. 定理全部证完. □

以下我们总假设 $A(t)$ 和 $f(t)$ 均于区间 I 上连续.

将定理 2.1 应用于方程组 (LH) 特别就有

引理 2.1 *方程组 (LH) 的解, 若于区间 I 的某点处为零 (向量), 则必于区间 I 上恒等于零 (向量).*

证明 设 $x = x(t)$ 是 (LH) 于 I 上的解，它于 $t_0 \in I$ 处为零 (向量). 则 $x = x(t)$ 是方程组 (LH) 满足初值条件 $x(t_0) = 0$ 的解. 由于 $x = 0$ 显然也是此方程组满足同一初值条件的解，根据定理 2.1 所指出的唯一性即知，必有

$$x(t) \equiv 0, \quad t \in I.$$

引理证完. □

注 2.1 *定理 2.1 显然包含这样一个基本事实，即方程组 (NH) 的任何解都能延拓到整个区间 I 上.*

为了说明这一点，设 $x = \psi(t)$ 为 (NH) 的任一解，其定义区间为 $I_0 \subset I$. 任取 $t_0 \in I_0$, 并令 $\xi = \psi(t_0)$. 根据定理 2.1, (NH) 于 I 上有解 $x = \varphi(t)$ 满足初值条件 (1.2), 并且在 I_0 上， $\varphi(t) \equiv \psi(t)$.

注 2.2 *皮卡迭代序列提供了近似求解 (NH) 的初值问题的方法.*

注 2.3 *设 $I = \mathbb{R}^1$ 且 $A(t)$ 和 $f(t)$ 是以正数 ω 为周期的周期函数， $x = \varphi(t)$ 是 (NH) 于 $\mathbb{R}^1$ 上的解, 则 $\varphi(t)$ 是以 ω 为周期的周期函数当且仅当 $\varphi(0) = \varphi(\omega)$.*

习 题

1. 求 **艾里** (Airy, 1801-1892) **方程** $x'' = tx$ 满足初值条件 $x(0) = c_1, x'(0) = c_2$ 的解.

提示：令 $x' = y$ 化成关于方程组的初值问题：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

并构造其皮卡迭代序列.

2. 定理 2.1 的证明中，若皮卡序列的 $\varphi_0(t)$ 不取 ξ 而改取区间 I 上任一连续的 n 维向量函数，这时证明中要做何种相应的改动？

3. 证明 (2.1) 的解 $x(t, t_0, \xi)$ 关于 t_0 于 I 内部一致连续.

4. 证明注 2.3.

5. 设 $\varphi(t, t_0, \xi)$ 是 (LH) 于 I 上定义的解. 证明：

$$\varphi(t, t_0, \alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha\varphi(t, t_0, \xi_1) + \beta\varphi(t, t_0, \xi_2),$$

其中 α, β 是任意常数， $t \in I$.

6. 在注 2.3 的假设下, 证明：若 (LH) 只有平凡的 ω- 周期解 $x = 0$, 则 (NH) 必有 ω- 周期解.

提示：任取 (NH) 一解 $\psi(t)$. 设 $\varphi(t, \xi)$ 是 (LH) 满足初值条件 $\varphi(0) = \xi$ 的解. 考虑证明线性方程 (关于 ξ) $\varphi(\omega, \xi) - \xi = \psi(0) - \psi(\omega)$ 有唯一解 ξ_0. 则 (NH) 满足初值条件 $x(0) = \psi(0) + \xi_0$ 的解 $x(t, \xi_0)$ 即为所求.

7. 设 $t_1 \in I$, $S = \{x(t_1, t_0, \xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}$, 其中 $x(t, t_0, \xi)$ 是 (LH), (1.2) 的解. 则 $S = \mathbb{R}^n$.

8. 设 $A_1(t), A_2(t)$ 是 I 上连续实的 $n \times n$ 矩阵函数， $f_1(t), f_2(t)$ 是 I 上连续的 n 维向量函数. 证明：若两个方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= A_1(t)x + f_1(t), \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= A_2(t)x + f_2(t)
\end{aligned}
$$

的在 $t = t_0 \in I$ 处满足任何相同初值条件的解都相等，则在 I 上， $A_1(t) \equiv A_2(t), f_1(t) \equiv f_2(t)$.

9. 在注 2.3 的假设下, 若 (NH) 于 $\mathbb{R}^1$ 有唯一的有界解 $x(t)$, 则它也是 ω- 周期解.