§ 3 (LH) 的通解的结构

本节研究齐次线性方程组 (LH) 的所有解作成的集合的结构. 因为任何解都能延拓到 I 上, 所以我们只考虑那些在 I 上有定义的解.

齐次线性方程组 (LH) 的最基本的性质是它的解具有可叠加性, 即下面的结论成立:

引理 3.1 **(叠加原理)** 若 $x=\varphi_1(t)$ 和 $x=\varphi_2(t)$ 都是 (LH) 的解, 则对任意常数 c_1, c_2, $x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$ 都是 (LH) 的解.

由叠加原理知, 若已知 (LH) 的 n 个解 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$, 则含任意常数 $c_1,\cdots,c_n$ 的向量函数

$$x=c_1\varphi_1(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$$

也是 (LH) 的解. 但它未必是 (LH) 的通解, 例如当 $\varphi_1(t)\equiv 0$ 时, 上式变成 $x=c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$, 它只含有 $n-1$ 个任意常数, 又如当 $\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)+\varphi_3(t)$ 时, 上式变成 $x=(c_1+c_2)\varphi_2(t)+(c_1+c_3)\varphi_3(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$, 它实际上也只含 $n-1$ 个任意常数. 因此为了使它能构成 (LH) 的通解, 必须对解组 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 之间的关系作适当限制, 这就引出了一组向量函数线性相关和线性无关的概念.

称向量函数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 在区间 I 上是 **线性相关** 的, 如果有不全为零的常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 使得

$$\alpha_1\varphi_1(t)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(t)\equiv 0,\quad t\in I; \tag{3.1}$$

否则, 即要想 (3.1) 成立, 除非 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=0$, 便称此 m 个向量函数于区间 I 上 **线性无关**.

引理 3.2 设 $t_0\in I$, $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 是区间 I 上 (LH) 的 m 个解. 则 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 在区间 I 上线性相关的充要条件是向量组 $\varphi_1(t_0),\cdots,\varphi_m(t_0)$ 线性相关.

证明 若向量组 $\varphi_1(t_0),\cdots,\varphi_m(t_0)$ 线性相关, 则存在不全为零的常数 α_1, $\cdots$, α_m 使得

$$\alpha_1\varphi_1(t_0)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(t_0)=0.$$

根据引理 3.1, $\alpha_1\varphi_1(t)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(t)$ 是 (LH) 的解. 它既然在 $t=t_0$ 处为零, 由引理 2.1 便知 (3.1) 必成立, 即 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 于 I 上线性相关. 引理的另一部分是显然的. □

定理 3.1 (LH) 于区间 I 上有 n 个线性无关的解. 如果 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是区间 I 上 (LH) 的 n 个线性无关的解, 则含任意常数 $c_1,\cdots,c_n$ 的表达式

$$x=c_1\varphi_1(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t) \tag{3.2}$$

是 (LH) 的通解，确切地说，是 (LH) 的全部解的共同表达式，即对任意常数 $c_1,\cdots,c_n$, 向量函数 *(3.2)* 都是 (LH) 的解；反之，(LH) 的任一解，都可以写成 *(3.2)* 这种形式.

证明 任意取定一点 $t_0\in I$ 和 n 个线性无关的 n 维常向量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$(显然存在). 对每一 i, $i=1,\cdots,n$, 以 $x_i(t)$ 表示 (LH) 满足初值条件 $x(t_0)=\xi_i$ 的解. 由定理 2.1 知，此解存在且于 I 上有定义. 由于向量组 $x_1(t_0),\cdots,x_n(t_0)$ 是线性无关的，根据引理 3.2 就知，$x_1(t),\cdots,x_n(t)$ 于 I 上线性无关.

设 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是 (LH) 在 I 上的 n 个线性无关的解. 则首先由引理 3.1 知，对任意常数 $c_1,\cdots,c_n$, (3.2) 是 (LH) 的解. 其次，若 $x(t)$ 是 (LH) 任一解，取定 $t_0\in I$, 由引理 3.2 知，向量组 $\varphi_1(t_0),\cdots,\varphi_n(t_0)$ 线性无关，从而由线性代数知，存在常数 $c_1^0,\cdots,c_n^0$, 使得

$$c_1^0\varphi_1(t_0)+\cdots+c_n^0\varphi_n(t_0)=x(t_0).$$

根据引理 3.1, 向量函数 $x=c_1^0\varphi_1(t)+\cdots+c_n^0\varphi_n(t)-x(t)$ 是 (LH) 的解，而上式表明，它在 t_0 处为零，故由引理 2.1 知，必有

$$c_1^0\varphi_1(t)+\cdots+c_n^0\varphi_n(t)-x(t)\equiv 0,\quad t\in I,$$

这表明解 $x(t)$ 可以通过在 (3.2) 中适当选取 $c_1,\cdots,c_n$ 而得到. 定理证完. □

注 3.1 *定理 3.1 表明，*(LH) *的解的全体，构成一个* n *维线性空间.*

(LH) 的任意 n 个线性无关的解合起来称为它的一个 **基本解组**. 如果以它们作为列向量排成一个 n 阶矩阵，则此矩阵称为 (LH) 的一个 **基本解矩阵**. 若以 $\Phi(t)$ 表示 (LH) 的一个基本解矩阵，则可将表达式 (3.2) 简写为

$$x=\Phi(t)c,$$

其中 $c=(c_1,\cdots,c_n)^\top$ 是任意的 n 维常向量. 作为 (LH) 的基本解矩阵，$\Phi(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\equiv A(t)\Phi(t),\quad t\in I, \tag{3.3}$$

$$\det\Phi(t)\neq 0,\quad t\in I. \tag{3.4}$$

(3.3) 之所以成立，是因为 $\Phi(t)$ 的每一列都是 (LH) 在 I 上的解；(3.4) 之所以成立，是因为 $\Phi(t)$ 的每一列不仅仅是 (LH) 的解，而且这 n 个解是线性无关的.

顺便指出，对于 n 个一般的 n 维向量函数，线性无关并不包含相应的 n 阶行列式不等于零，例如二维向量函数

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}$$

它于任意区间上线性无关，可是相应的行列式却恒等于零.

设有 n 个定义在区间 I 上的向量函数：

$$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n1}(t)\end{pmatrix},\cdots,\varphi_n(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{1n}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{nn}(t)\end{pmatrix},$$

由它们排列而成的行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

称为这 n 个向量函数的 **朗斯基**(Wronski, 1776-1853)**行列式**.

引理 3.3 **(刘维尔公式)** 若 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是 (LH) 的解，则它们的朗斯基行列式 $W(t)$ 可表示为

$$W(t)=W(t_0)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s\right\},\quad t\in I,$$

其中 $t_0\in I$ 可任意取定，而 $\mathrm{tr}A(s)=a_{11}(s)+\cdots+a_{nn}(s)$.

证明 由行列式的微商公式知

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=W_1(t)+\cdots+W_n(t),$$

其中 $W_i(t)$ 是这样的 n 阶行列式，它的第 i 行元素是 $W(t)$ 中第 i 行相应元素的微商，而除第 i 行元素外的其它元素仍是 $W(t)$ 中的相应元素. 由行列式的性质知

$$W_i(t)=a_{ii}(t)W(t),\quad i=1,\cdots,n,$$

可见 $x=W(t)$ 是下述初值问题的解：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(a_{11}(t)+\cdots+a_{nn}(t))x,\quad x(t_0)=W(t_0).$$

所以引理的结论成立. □

这个引理加强了前面的结论 (3.4).

注 3.2 设 $\Phi_1(t)$ 和 $\Phi_2(t)$ 是 (LH) 在区间 I 上的两个基本解矩阵. 则存在非奇异常矩阵 C, 使得

$$\Phi_2(t)\equiv\Phi_1(t)C,\quad t\in I.$$

注 3.3 设 $\tau \in I$. 若 (LH) 的基本解矩阵 $\Phi(t)$ 满足初值条件 $\Phi(\tau) = E$ (n 阶单位阵), 则 $\Phi(t)$ 称为 **状态转移矩阵**. 显然, 对任一基本解矩阵 $\Phi(t)$, $\Psi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ 是状态转移矩阵. 容易证明:

1. 状态转移矩阵 $\Psi(t,\tau)$ 与基本解矩阵 $\Phi(t)$ 的选择无关;

2. $\Psi(t,\tau)$ 关于变量 t 是矩阵方程

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = A(t)Y$$

满足初值条件 $Y(\tau) = E$ 的唯一解;

3. 对任意 $t,\tau \in I$, $\Psi(t,\tau)$ 是非奇异的, 并且 $\Psi^{-1}(t,\tau) = \Psi(\tau,t)$;

4. 对任意 $t,\sigma,\tau \in I$,

$$\Psi(t,\tau) = \Psi(t,\sigma)\Psi(\sigma,\tau);$$

5. (LH) 的解 $x(t,\tau,\xi)$ 有表达式

$$x(t,\tau,\xi) = \Psi(t,\tau)\xi.$$

习 题

1. 求出方程组

$$t\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 2x_1 - x_2, \quad t\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 2x_1 - x_2$$

的一个基本解组及它们的朗斯基行列式. 这个行列式在 $t = 0$ 处为零而却不恒等于零，是否与引理 3.3 矛盾？

2. 已知 $n \times n$ 函数矩阵 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 均于区间 I 连续. 试证：若方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A_1(t)x \;\; 与 \;\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A_2(t)x$$

有一相同的基本解组，则 $A_1(t) \equiv A_2(t)$, $t \in I$.

3. 已知 $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 是区间 I 上 n 个具有连续导数的 n 维函数向量，它们的朗斯基行列式处处不为零. 则于 I 必有 $n \times n$ 的连续函数矩阵 $A(t)$, 使得 $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 构成方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x, \quad t \in I$$

的一个基本解组.

4. 证明注 3.2 和注 3.3.

5. 在 (LH) 中，设 $A(t+\omega)\equiv A(t)$. 若 $\int_0^\omega \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s\neq 0$, 则 (LH) 的所有解不能都是 ω- 周期解.

6. 设 (NH) 的系数是 ω- 周期的. 证明： (NH) 有唯一 ω- 周期解的充要条件是 (LH) 只有平凡的 ω- 周期解 $x=0$.