§ 4　(NH) 的通解的结构

本节转到非齐次线性方程组 (NH). 为了弄清 (NH) 的通解的结构，首先注意 (NH) 与 (LH) 之间的如下关系，其证明是显然的.

引理 4.1 (NH) 的解与相应的 (LH) 的解之和仍是 (NH) 的解. (NH) 的两个解之差是相应的 (LH) 的解.

利用这一关系和相应的 (LH) 的通解就可得到 (NH) 的通解.

定理 4.1 设 $\psi(t)$ 是 (NH) 的一个解，$\Phi(t)$ 是相应的 (LH) 的一个基本解矩阵. 则含 n 维任意常向量 c 的表达式

$$x = \Phi(t)c + \psi(t) \tag{4.1}$$

是 (NH) 全部解的共同表达式.

证明　首先，由引理 4.1 知对任意 n 维常向量 c, (4.1) 是 (NH) 的解. 其次，若 $x(t)$ 是 (NH) 的任意给定的解，则由引理 4.1 知 $x(t) - \psi(t)$ 是相应的 (LH) 的解. 再由定理 3.1 知存在 n 维常向量 c^0, 使得

$$x(t) - \psi(t) \equiv \Phi(t)c^0, \quad t \in I,$$

这表明解 $x(t)$ 可通过在 (4.1) 中适当选取 c 而得到. 定理证完. □

根据定理 4.1, 假如已知相应的 (LH) 的一个基本解矩阵，则求 (NH) 的通解的问题就归结为求它的任意一个特解. 为求 (NH) 的特解，我们可采取常数变易法. 利用这种方法，实际上不只可得到 (NH) 的一个特解，而且同时可得到它的通解.

定理 4.2 (常数变易公式) 设 $\Phi(t)$ 是与 (NH) 相应的 (LH) 的一个基本解矩阵. 则 (NH) 的全部解的共同表达式可以表示成

$$x = \Phi(t)\left(c + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\right), \tag{4.2}$$

其中 c 是任意的 n 维常向量，$t_0 \in I$ 可任意取定.

证明　我们知道 (LH) 的通解可表示为

$$x = \Phi(t)c,$$

其中 c 为任意 n 维常向量. 现在将常向量 c 换成向量函数 $c(t)$, 考虑形如

$$x = \Phi(t)c(t) \tag{4.3}$$

的向量函数，而设法在这种形式的函数中去求 (NH) 的解，其中 $c(t)$ 是待定的可微向量函数．将 (4.3) 代入 (NH), 得到

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}c(t)+\Phi(t)\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)\Phi(t)c(t)+f(t).$$

因为 $\Phi(t)$ 是 (LH) 的基本解矩阵，故上式可简化为

$$\Phi(t)\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}=f(t).$$

这是一个关于 $\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}$ 的线性代数方程组．由于 $\det\Phi(t)\neq 0$, 故可解出

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}=\Phi^{-1}(t)f(t).$$

任取 $t_0\in I$, 积分上式得到

$$c(t)=c+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s, \tag{4.4}$$

其中 c 是任意 n 维常向量. 特别取 $c=0$, 而将 $c(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$ 代入 (4.3), 我们得到 (NH) 的一个特解 $x=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$. 再由定理 4.1 便得到所要证明的结论．实际上，将 (4.4) 代入 (4.3) 就可直接得到定理的结论． □

注 4.1 *利用状态转移矩阵 $\Psi(t,\tau)$, 初值问题 (NH), (1.2) 的解可表为*

$$x=\Psi(t,t_0)\left(\xi+\int_{t_0}^{t}\Psi^{-1}(t_0,s)f(s)\mathrm{d}s\right). \tag{4.5}$$

习 题

1. 如果 (NH) 中 $f(t)\not\equiv 0$, 则 (NH) 于 I 上有 $n+1$ 个线性无关的解.

2. 已知 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{n+1}(t)$ 是 (NH) 于 I 上的 $n+1$ 个线性无关的解，写出 (NH) 的全部解的共同表达式.

3. 设 $\Phi(t)$ 是 (LH) 的一个基本解矩阵， $f(t,x)$ 是 n 维的向量函数，于区域： $t\in I, x\in(-\infty,+\infty)$ 上连续．则对 $t_0\in I$ 和 n 维常向量 ξ, 求解初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t,x),\quad x(t_0)=\xi \tag{4.6}$$

等价于求解积分方程组

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s,x(s))\mathrm{d}s, \tag{4.7}$$

即若 $x=x(t)$ 是 (4.6) 的解，则它是 (4.7) 的连续的解；反之，若 $x=x(t)$ 是 (4.7) 的连续的解，则它也是 (4.6) 的解.