§5 边值问题和周期解

在 §2 中, 我们研究了方程组 (NH) 的初值问题, 证明了它的解存在且唯一. 根据 §4 的讨论，我们进一步知道，初值问题的解可利用方程组 (LH) 的基本解矩阵表出. 本节指出：利用基本解矩阵，还可以讨论边值问题和周期解. 为简单计，我们只讨论具有如下边值条件的边值问题：

周期边值条件： $x(a)=x(b)$,

两点边值条件： $Lx(a)+Nx(b)=0$,

其中 $a,b\in I, L,N$ 为 $n\times n$ 常矩阵. 与初值问题不同，一般来说，边值问题不一定有解，即使有，也不一定唯一.

但我们有下面的基本结果.

定理 5.1 *若方程组 (LH) 的边值问题仅有平凡解 $x=0$, 则对任何 $f(t)$, 方程组 (NH) 的边值问题恒有解.*

证明 先考虑周期边值条件. 由定理 4.2 知，方程组 (NH) 的解可表成

$$x=\Phi(t)\left(c+\int_a^t\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\right). \tag{5.1}$$

由此知，它满足周期边值条件当且仅当向量 c 满足

$$\Phi(a)c=\Phi(b)\left(c+\int_a^b\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\right),$$

即

$$\Big(\Phi(a)-\Phi(b)\Big)c=\Phi(b)\int_a^b\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s. \tag{5.2}$$

对于齐次方程组 (LH), (5.2) 变成

$$\Big(\Phi(a)-\Phi(b)\Big)c=0. \tag{5.3}$$

按假设，(LH) 只有平凡解满足周期边值条件, 即关于 c 的线性代数方程组 (5.3) 只有零解 $c=0$, 故必有

$$\det\Big(\Phi(a)-\Phi(b)\Big)\neq 0,$$

从而可由 (5.2) 把 c 解出，代入 (5.1) 便得到 (NH) 满足周期边值条件的解.

假如所考虑的是两点边值条件，则代替 (5.2) 和 (5.3) 的分别是

$$\Big(L\Phi(a)+N\Phi(b)\Big)c=-N\Phi(b)\int_a^b\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

和

$$\Big(L\Phi(a)+N\Phi(b)\Big)c=0.$$

其余同理. 定理证完. □

注 5.1 *从定理 5.1 的证明可知: 齐次方程组 (LH) 只有零解 $x=0$ 满足周期边值条件 (两点边值条件) 的充要条件是 $\Phi(b)-\Phi(a)(L\Phi(a)+N\Phi(b))$ 是非奇异矩阵.*

下面讨论方程组 (NH) 的周期解. 我们的问题是: 如果 $A(t)$ 和 $f(t)$ 都在 $\mathbb{R}^1$ 上有定义, 并且是 ω- 周期函数, 即以 ω 为周期的周期函数, 这里 $\omega>0$ 为某常数, 那么在何种条件下, 方程组 (NH) 存在 ω- 周期解? 下述 **马塞拉**(Massera, 1915-2002)**准则** 给出了回答.

定理 5.2 *若 $A(t)$ 和 $f(t)$ 在 $\mathbb{R}^1$ 上有定义, 并且是 ω- 周期函数, 则方程组 (NH) 存在 ω- 周期解的充要条件是: (NH) 有一个在 $\mathbb{R}^1$ 上有界的解.*

证明 必要性是显然的. 只须证明充分性. 设 $x=x_0(t)$ 是 (NH) 于 $\mathbb{R}^1$ 上有界的解. 由 $A(t)$ 和 $f(t)$ 的周期性知, 对任何正整数 $k, x_0(t+(k-1)\omega)$ 是 (NH) 满足初值条件 $x(0)=x_0((k-1)\omega)$ 的解, 故由 (4.5) 有

$$x_0(t+(k-1)\omega)=\Phi(t)\bigg(x_0((k-1)\omega)+\int_0^t\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\bigg),\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $\Phi(t)$ 是 (LH) 的状态转移矩阵, 特别就有

$$x_0(k\omega)=\Phi(\omega)x_0((k-1)\omega)+v,\quad k=1,2,\cdots,\tag{5.4}$$

其中 $v=\Phi(\omega)\int_0^\omega\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$.

(NH) 的任何解都可由 (4.2) 表出, 它是 ω- 周期解, 当且仅当

$$\Phi(0)c=\Phi(\omega)\bigg(c+\int_0^\omega\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\bigg).$$

注意到 $\Phi(0)=E$, 上式就可写成

$$(\Phi(\omega)-E)c=-v.\tag{5.5}$$

假如 (NH) 没有 ω- 周期解, 则关于 c 的线性代数方程组 (5.5) 必无解. 由线性代数的知识我们知道, 必存在非零向量 u, 使得

$$u^\top(\Phi(\omega)-E)=0,\tag{5.6}$$

$$u^\top v\neq 0,\tag{5.7}$$

联合 (5.4), (5.6) 可以证明

$$u^\top x_0(k\omega) = u^\top x_0(0) + k u^\top v, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{5.8}$$

但由于有 (5.7), 而 $x_0(t)$ 又是有界的，当 k 充分大时 (5.8) 不可能成立，这一矛盾就表明 (NH) 必有 ω- 周期解.

现在回头来由 (5.4), (5.6) 推导 (5.8). 假设当 $k = m$ 时 (5.8) 成立. 利用当 $k = m+1$ 时的 (5.4) 可得

$$\begin{aligned} u^\top x_0((m+1)\omega) &= u^\top \Phi(\omega) x_0(m\omega) + u^\top v \\ &= u^\top(\Phi(\omega) - E) x_0(m\omega) + u^\top x_0(m\omega) + u^\top v \\ &= u^\top x_0(0) + m u^\top v + u^\top v \\ &= u^\top x_0(0) + (m+1) u^\top v, \end{aligned}$$

故当 $k = m+1$ 时， (5.8) 也成立. 利用当 $k = 1$ 时的 (5.4) 容易验证当 $k = 1$ 时， (5.8) 也成立. 总之， (5.8) 对任何正整数 k 都成立. 至此，定理得到了完全的证明. □

习 题

1. 设 $I = \mathbb{R}^1, \omega > 0$, 且在 I 上， $A(t+\omega) \equiv A(t), f(t+\omega) \equiv f(t)$. 证明：若对 (LH) 的每一解 $x = x(t)$, 有

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0,$$

则 (NH) 有唯一的 ω- 周期解 $x = x_0(t)$, 并且 (NH) 的其它解 $x = x(t)$ 当 $t \to +\infty$ 时都渐近于它，即

$$\lim_{t \to +\infty} (x(t) - x_0(t)) = 0.$$

2. 证明注 5.1.

3. 证明： (NH) 有唯一解 $x = x(t)$ 满足边值条件 $B(x) \equiv \sum\limits_{i=1}^{k} L_i x(t_i) = 0$ 的充要条件是 (LH) 只有平凡解 $x = 0$ 满足边值条件 $B(x) = 0$, 即矩阵 $\sum\limits_{i=1}^{k} L_i \Phi(t_i)$ 非奇异，其中 $L_i, i = 1, \cdots, k$ 是 n 阶矩阵， $t_i \in I, \Phi(t)$ 是 (LH) 的基本解矩阵.

4. 证明： (NH) 有唯一解 $x = x(t)$ 满足边值条件 $B(x) \equiv \int_a^b x(s) \mathrm{d}s = 0$ 的充要条件是 (LH) 只有平凡解 $x = 0$ 满足边值条件 $B(x) = 0$, 即矩阵 $\int_a^b \Phi(s) \mathrm{d}s$ 非奇异，其中 $\Phi(t)$ 是 (LH) 的基本解矩阵.