§6 高阶线性方程

本节讨论形如

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \tag{6.1}$$

的 n **阶线性微分方程**, 其中 $x, a_1(t), \cdots, a_n(t), f(t)$ 都是区间 I 上的纯量函数. 当 $f(t)\equiv 0$ 时, (6.1) 变成

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0, \tag{6.2}$$

它称为 n **阶齐次线性微分方程**. 我们要讨论它们解的结构以及关于周期解和边值问题的一些基本结果.

6.1 通解的结构

由于引进 n 个未知函数

$$x_1=x, x_2=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, x_n=\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}$$

后，方程 (6.1) 化成等价方程组：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

这里说的等价指的是：如果 $x=\varphi(t), t\in I$ 是 (6.1) 的解，则 $x_1=\varphi(t), x_2=\varphi'(t), \cdots, x_n=\varphi^{(n-1)}(t), t\in I$ 是 (6.3) 的解. 反之，如果 $x_1=\varphi_1(t), \cdots, x_n=\varphi_n(t), t\in I$ 是 (6.3) 的解，则 $x=\varphi_1(t)$ 是 (6.1) 的解. 利用这种等价关系，容易把前几节的结果搬到 (6.1) 和 (6.2) 上.

定理 $2.1'$ *设 $a_1(t), \cdots, a_n(t)$ 和 $f(t)$ 均于区间 I 上连续. 则对任一 $t_0\in I$ 和任意 n 个常数 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$, 方程 (6.1) 恒有定义在整个区间 I 上且满足初值条件*

$$x(t_0)=\xi_0, \quad x'(t_0)=\xi_1, \cdots, x^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1}$$

的解. 此外，方程 (6.1) 也只能有一个解满足此初值条件.

以下我们总认为 $a_1(t), \cdots, a_n(t)$ 和 $f(t)$ 均于区间 I 连续.

引理 2.1′ *齐次线性方程 (6.2) 的解，若于区间 I 的某点处，它本身及其直到 $n-1$ 阶微商均为零，则它必于区间 I 上恒等于零.*

引理 3.1′**(叠加原理)** *若 $x=\varphi_1(t)$ 和 $x=\varphi_2(t)$ 都是 (6.2) 的解，则对任意常数 c_1,c_2, 函数 $x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$ 都是 (6.2) 的解.*

称函数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 在区间 I 上 **线性相关**, 如果有不全为零的常数 α_1, $\cdots$, α_m 使得

$$\alpha_1\varphi_1(t)+\cdots+\alpha_m\varphi_m(t)\equiv 0,\quad t\in I. \tag{6.4}$$

否则，即要想 (6.4) 成立，除非 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=0$, 便称这 m 个函数于区间 I 上 **线性无关**.

引理 3.2′ *设 $t_0\in I$, $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 是区间 I 上齐次线性方程 (6.2) 的 m 个解. 则解组 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 于 I 线性相关的充要条件是向量组*

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(t_0)\\ \varphi_1'(t_0)\\ \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0)\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\varphi_m(t_0)\\ \varphi_m'(t_0)\\ \vdots\\ \varphi_m^{(n-1)}(t_0)\end{pmatrix}$$

线性相关.

定理 3.1′ *齐次线性方程 (6.2) 于区间 I 上有 n 个线性无关的解. 如果 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是 (6.2) 于区间 I 上的 n 个线性无关的解，则含任意常数 c_1, $\cdots$, c_n 的表达式*

$$x=c_1\varphi_1(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$$

是 (6.2) 的通解，确切地说，是 (6.2) 的全部解的共同表达式.

注 6.1 定理 3.1′ 表明， n 阶齐次线性方程 (6.2) 的解的全体，构成一个 n 维线性空间.

齐次线性方程 (6.2) 的任意 n 个线性无关的解合起来，称为它的一个 **基本解组**.

设有 n 个定义在区间 I 上且 $n-1$ 次可微的函数 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$, 由它们及其直到 $n-1$ 阶微商排列而成的行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t)\\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_n'(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix}$$

称为这 n 个函数的 **朗斯基行列式**.

引理 3.3′(**刘维尔公式**)若 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是 (6.2) 的解，则它们的朗斯基行列式 $W(t)$ 可表示为

$$W(t)=W(t_0)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}a_1(s)\mathrm{d}s\right\},\quad t\in I,$$

其中 $t_0\in I$ 可任意取定.

引理 4.1′ 若 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 分别是 (6.1) 和 (6.2) 的解，则函数 $x=\varphi(t)+\psi(t)$ 是 (6.1) 的解；若 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 是 (6.1) 的解，则函数 $x=\varphi(t)-\psi(t)$ 是 (6.2) 的解.

定理 4.1′ 设 $\psi(t)$ 是 (6.1) 的一个解， $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是相应的 (6.2) 的一个基本解组. 则含 n 个任意常数 $c_1,\cdots,c_n$ 的表达式

$$x=c_1\varphi_1(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)+\psi(t)$$

是 (6.1) 全部解的共同表达式.

定理 4.2′(**拉格朗日常数变易公式**) 设 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是与 (6.1) 相应的 (6.2) 的一个基本解组. 则 (6.1) 的全部解的共同表达式可以写为

$$x=c_1\varphi_1(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\Delta(t,s)}{W(s)}f(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $c_1,\cdots,c_n$ 是任意常数， $t_0\in I$ 可任意取定， $W(t)$ 是 $\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 的朗斯基行列式， $\Delta(t,s)$ 是这样的 n 阶行列式：前 $n-1$ 行是 $W(s)$ 的前 $n-1$ 行相应元素，而第 n 行是 $W(t)$ 第一行的相应元素.

例 6.1 设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 是与二阶线性方程

$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=f(t) \tag{6.5}$$

相应的齐次方程的基本解组. 则 (6.5) 的全部解的共同表达式为

$$x=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi_1(\tau)\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\varphi_2(\tau)}{\varphi_1(\tau)\varphi_2'(\tau)-\varphi_1'(\tau)\varphi_2(\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{6.6}$$

习　题

1. 已知函数 $a(t)$,$b(t)$,$f(t)$ 于 $\mathbb{R}^1$ 连续，函数

$$3\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t,\quad \mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t^3},\quad 7\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t,\quad 5\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t^3}$$

是线性方程

$$x''+a(t)x'+b(t)x=f(t)$$

的 4 个解，求此方程通解和满足初值条件 $x(0)=0, x'(0)=1$ 的特解.

2. 证明拉格朗日常数变易公式.

3. 假设 $a(t)$, $b(t)$ 于 $0 \le t \le 1$ 上连续. 证明：方程

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

满足初值条件 $x(0)=0$ 的任意两个解都是线性相关的.

4. 假设 $a_1(t), \cdots, a_n(t)$ 均于 $\mathbb{R}^1$ 连续， $x=\varphi(t)$ 是方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0$$

的非零解. 证明：在任意有限区间内， $x=\varphi(t)$ 的零点个数有限.

5. 证明方程

$$x'' - t^2 x = 0$$

满足初值条件 $x(0)=1, x'(0)=0$ 的解是一个处处为正的偶函数.

6. 已知函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 于区间 I 具有连续的导数，它们于区间 I 线性无关，且朗斯基行列式恒等于零. 证明：必有点 $t_0 \in I$, 使得

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \psi(t_0) = \psi'(t_0) = 0.$$

7. 设 (6.2) 是系数为 ω- 周期的微分方程. 证明：若 $\int_0^\omega a_1(s)\mathrm{d}s \ne 0$, 则 (6.2) 存在非 ω- 周期的解.

6.2 边值问题和周期解 *

因为高阶线性方程可以化成等价的一阶线性方程组，所以 §5 关于一阶线性方程组的边值问题和周期解的结论都可以通过这种等价关系转移到高阶线性方程. 在这一节里，我们将针对二阶线性方程

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t) \tag{6.7}$$

进一步讨论它的边值问题和周期解以及其它相关的问题, 这里 $a_1(t), a_2(t), f(t)$ 都是区间 I 上的连续函数. 相应的齐次方程为

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0. \tag{6.8}$$

我们只考虑边值条件

$$x(a) = x(b) = 0, \tag{6.9}$$

其中 $a, b \in I, a < b$.

定理 6.1 *若 $a_2(t) \le 0$, 则齐次方程的边值问题 (6.8), (6.9) 只有平凡解 $x=0$, 即恒为零的解，而非齐次方程的边值问题 (6.7), (6.9) 则对任何 $f(t)$ 恒有解.*

证明 假如边值问题 (6.8), (6.9) 有解 $x(t) \ne 0$, 则必有 $x'(a) \ne 0$; 否则，我们就同时有 $x(a) = 0, x'(a) = 0$. 从而根据初值问题解的唯一性推出 $x(t) \equiv 0$. 为确定计，设 $x'(a) > 0$. 于是，由于 $x(b)=0$, 必存在 $\xi \in (a, b]$, 使得

$$x(t) > 0,\ t \in (a, \xi);\quad x(\xi) = 0. \tag{6.10}$$

而由 $x(a)=x(\xi)=0$ 进而可知，存在 $c\in(a,\xi)$, 使得 $x'(c)=0$. 以 $e^{\int_a^t a_1(s)\mathrm{d}s}$ 乘 (6.8) 两端，可将 (6.8) 写成

$$\left(x'(t)e^{\int_a^t a_1(s)\mathrm{d}s}\right)'+a_2(t)e^{\int_a^t a_1(s)\mathrm{d}s}x(t)=0,$$

从 a 到 c 积分，注意到 $x'(c)=0$ 就得到

$$-x'(a)+\int_a^c a_2(t)e^{\int_a^t a_1(s)\mathrm{d}s}x(t)\mathrm{d}t=0.$$

但由 $x'(a)>0, a_2(t)\le 0$ 和 (6.10) 知，上式左端却为负数．这一矛盾表明：齐次方程的边值问题 (6.8), (6.9) 不可能有非平凡解存在.

为证定理的第二部分，注意方程 (6.7) 与方程组

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-a_2(t)x-a_1(t)y+f(t) \end{cases} \tag{6.11}$$

等价，而边值条件 (6.9) 可写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(b) \\ y(b) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

既然边值问题 (6.8), (6.9) 只有平凡解，易见 (6.11) 的齐次方程组也只有平凡解满足边值条件 (6.12), 故由定理 5.1 知，边值问题 (6.11), (6.12), 从而边值问题 (6.7), (6.9) 对任何 $f(t)$ 恒有解．定理证完. □

定理 6.2 *设 $I=\mathbb{R}^1, a_1(t), a_2(t), f(t)$ 都是 ω- 周期函数．若 $a_2(t)\le 0$, 则齐次方程 (6.8) 只有恒为常值的 ω- 周期解；若 $0\not\equiv a_2(t)\le 0$, 则齐次方程 (6.8) 只有恒为零的 ω- 周期解，而非齐次方程 (6.7) 则对任何 $f(t)$ 恒有 ω- 周期解.*

证明 假设齐次方程 (6.8) 存在非常值的 ω- 周期解 $x(t)$. 既然 $x(t)$ 是非常值的，特别就应该有非零点 η. 为确定计，设 $x(\eta)>0$. 否则可代替 $x(t)$ 而考虑 $\tilde{x}(t)=-x(t)$, 它仍是 (6.8) 的非常值 ω- 周期解，但 $\tilde{x}(\eta)>0$. 进而不难推断：存在 $t_0<t_1$, 使得

$$x(t)>0,\ t\in(t_0,t_1);\quad x'(t_0)>0,\ x'(t_1)=0. \tag{6.13}$$

为证 (6.13), 我们分两种情形来考虑：

1) $x(t)$ 有零点.

设 $x(\xi)=0$. 则必有 $x'(\xi)\ne 0$. 若 $x'(\xi)>0$, 则取 $t_0=\xi$. 假如 $x'(\xi)<0$, 则由 $x(t)$ 的周期性可知，必有 $t_0>\xi$, 使得

$$x(t)<0,\ t\in(\xi,t_0);\quad x(t_0)=0.$$

特别就有 $x'(t_0)\ge 0$. 但又不可能 $x'(t_0)=0$, 故 $x'(t_0)>0$. 再利用 $x(t)$ 的周期性可断言：存在 $\sigma>t_0$ 使得

$$x(t)>0,\ t\in(t_0,\sigma);\quad x(\sigma)=0.$$

进而知，存在 $t_1\in(t_0,\sigma)$ 使得 $x'(t_1)=0$. 这就证明了，在所论情形下，存在 $t_0<t_1$, 使得 (6.13) 成立.

2) $x(t)$ 没有零点.

我们已知 $x(\eta)>0$, 故恒有 $x(t)>0$. 由于 $x(t)$ 是非常值的，又是周期的，故不可能恒有 $x'(t)\le 0$. 任取 t_0, 使得 $x'(t_0)>0$. 同理，当 $t>t_0$ 时，不可能恒有 $x'(t)>0$. 故必存在 $t_1>t_0$, 使得 $x'(t_1)=0$. 由于 $x(t)$ 恒正，因此对这样的 t_0, t_1, (6.13) 成立.

类似定理 6.1 的证明，以 $\exp\{\int_{t_0}^t a_1(s)\mathrm{d}s\}$ 乘以 (6.8) 的两端，然后从 t_0 到 t_1 积分，由 (6.13) 和 $a_2(t)\le 0$, 就可引出矛盾．因此方程 (6.8) 只能有恒为常值的 ω- 周期解．若 $0\not\equiv a_2(t)\le 0$, 则可进一步断言：齐次方程 (6.8) 只有恒为零的 ω- 周期解；这是因为将常值解 $x\equiv c$, 代入 (6.8) 得到 $a_2(t)c=0$, 而 $a_2(t)\not\equiv 0$ 就包含 $c=0$.

为证第二部分，首先注意：求方程 (6.7) 的 ω- 周期解的问题等价于求方程组 (6.11) 满足边值条件

$$x(0)=x(\omega),\quad y(0)=y(\omega) \tag{6.14}$$

的解，这是因为，若 $x(t)$ 是 (6.7) 的 ω- 周期解，则 $x(t)$, $y(t)=x'(t)$ 是边值问题 (6.11), (6.14) 的解；反之，若 $x(t),y(t)$ 是边值问题 (6.11), (6.14) 的解，则 $x(t),y(t)$ 可延拓成 $\mathbb{R}^1$ 上的 ω- 周期函数 (仍记为 $x(t),y(t)$), 其中的 $x(t)$ 便是 (6.7) 的周期解．由此可见，方程 (6.7) 有 ω- 周期解，当且仅当边值问题 (6.11), (6.14) 有解．既然齐次方程 (6.8) 只有恒为零的 ω- 周期解，与 (6.11) 相应的齐次方程组就只有平凡解满足边值条件 (6.14). 故根据定理 5.1, 边值问题 (6.11), (6.14) 恒有解，从而方程 (6.7) 恒有 ω- 周期解，定理证完. □

下面讨论二阶线性方程解的零点．为此我们首先通过变换 $x=vu$ 将方程 (6.8) 简化，这里 $u=u(t)$ 是新的未知函数， $v=v(t)$ 待定．代入 (6.8) 得到

$$vu''+(2v'+a_1(t)v)u'+(v''+a_1(t)v'+a_2(t)v)u=0.$$

我们希望 $2v'+a_1(t)v=0$, 这只须取

$$v=e^{-\frac{1}{2}\int a_1(t)\mathrm{d}t}.$$

这样一来，方程 (6.8) 就化成下面的形式：

$$x''+P(t)x=0. \tag{6.15}$$

由于上述的 $v=v(t)$ 恒为正，所以在讨论解的零点时，可以代替 (6.8) 而考虑形如 (6.15) 的方程．我们将通过与另一方程

$$y''+Q(t)y=0 \tag{6.16}$$

的解进行比较来考察 (6.15) 的解的零点的分布．总假设函数 $P(t),Q(t)$ 在区间 I 上连续.

定理 6.3 (**斯图姆** (Sturm, 1803-1855) **比较定理**) *1) 设 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 分别是方程 (6.15) 和 (6.16) 在区间 I 上的非零解， $t_1,t_2(t_1<t_2)$ 是 $y(t)$ 的零点．若 $Q(t)\le P(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, 则在闭区间 $[t_1,t_2]$ 上至少有 $x(t)$ 的一个零点；若还有 $Q(t)\not\equiv P(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, 则在区间 (t_1,t_2) 内至少有 $x(t)$ 的一个零点.*

2) 若 $m^2\le P(t)\le M^2$, $t\in I$, 其中 m 和 M 为正常数，则对 $x(t)$ 的任意两个相邻零点 $t_1,t_2\in I, t_1<t_2$, 有

$$\frac{\pi}{M}\le t_2-t_1\le\frac{\pi}{m};$$

若还有 $P(t)\not\equiv m^2,M^2$, 则

$$\frac{\pi}{M}< t_2-t_1<\frac{\pi}{m}.$$

证明 1) 因为 $y=y(t)$ 是 (6.16) 的非零解，且 $y(t_1)=0$, 故 $y'(t_1)\ne 0$. 不妨设 $y'(t_1)>0$, 否则我们用 $-y(t)$ 代替 $y(t)$, 它仍是 (6.16) 的非零解，并且仍以 t_1,t_2 为零点．又因为 $y(t_2)=0$, 不难看出，有 $\xi\in(t_1,t_2]$, 使得

$$y(t)>0,\ t\in(t_1,\xi);\quad y(\xi)=0,\ y'(\xi)<0.$$

由 (6.15), (6.16), 我们有

$$(xy' - x'y)' = (P(t) - Q(t))xy.$$

从 t_1 到 ξ 积分上式，得到

$$x(\xi)y'(\xi) - x(t_1)y'(t_1) = \int_{t_1}^{\xi} (P(t) - Q(t))x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{6.17}$$

假如 $x(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上没有零点，比如 $x(t) > 0,\ t \in [t_1, t_2]$, 则上式左端为负，而右端却是非负的，矛盾；若 $x(t) < 0,\ t \in [t_1, t_2]$, 则上式左端为正，而右端非正，同样可得出矛盾．这说明 $x(t)$ 在 $[t_1, t_2]$ 上有零点．

再证明 1) 的第二部分．假如 $x(t)$ 在 (t_1, t_2) 内没有零点，不妨设 $x(t) > 0,\ t \in (t_1, t_2)$, 则 (6.17) 的左端非正，而由于 $Q(t) \le P(t), Q(t) \not\equiv P(t)$, 右端为正．这一矛盾表明 $x(t)$ 在 (t_1, t_2) 内有零点．

2) 现在设 $t_1, t_2 \in I (t_1 < t_2)$ 为 $x(t)$ 的两个相邻零点．将 $x(t)$ 与方程

$$y'' + m^2 y = 0$$

的解 $y = \sin m(t - t_1 - \delta)$ 进行比较．注意 $\tilde{t}_1 = t_1 + \delta$ 和 $\tilde{t}_2 = t_1 + \delta + \frac{\pi}{m}$ 是 $\sin m(t - t_1 - \delta)$ 的相邻零点．假如 $t_2 - t_1 > \frac{\pi}{m}$, 则当 $\delta > 0$ 充分小时， $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in (t_1, t_2)$. 但另一方面，根据定理的前一部分，在 $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ 上至少有 $x(t)$ 的一个零点，这与 t_1, t_2 是 $x(t)$ 的相邻零点的假设矛盾．故 $t_2 - t_1 \le \frac{\pi}{m}$. 同理，将 $x(t)$ 与方程

$$y'' + M^2 y = 0$$

的解 $y = \sin M(t - t_1 + \delta)(\delta > 0$ 充分小) 进行比较可以证明 $t_2 - t_1 \ge \frac{\pi}{M}$.

若更设 $P(t) \not\equiv m^2$, 则可将 $x(t)$ 与 $y = \sin m(t - t_1)$ 进行比较．假如 $t_2 - t_1 \ge \frac{\pi}{m}$, 则 $\sin m(t - t_1)$ 的两个相邻零点 t_1 和 $t_1 + \frac{\pi}{m}$ 都在 $[t_1, t_2]$ 上，根据定理的前一部分，这时在 $(t_1, t_1 + \frac{\pi}{m})$ 内至少有 $x(t)$ 的一个零点，这又与 t_1, t_2 是 $x(t)$ 的相邻零点的假设矛盾．故必有 $t_2 - t_1 < \frac{\pi}{m}$. 同理可证，若更设 $P(t) \not\equiv M^2$, 则 $t_2 - t_1 > \frac{\pi}{M}$. 定理证完． □

作为定理 6.3 的应用之一例，我们有下面的结果：

定理 6.4 *设 $I = \mathbb{R}^1, P(t)$ 是 2π- 周期函数．若对某正整数 $N, N^2 \le P(t) \le (N+1)^2$, 但 $P(t) \not\equiv N^2, (N+1)^2$, 则方程 (6.15) 只有恒为零的 2π- 周期解，而非齐次方程*

$$x'' + P(t)x = f(t)$$

则对任何连续的 2π- 周期函数 $f(t)$ 恒存在 2π- 周期解．

证明 只须证明第一部分，因为第二部分实际上在定理 6.2 中已经证明过．假设方程 (6.15) 有 2π- 周期解 $x(t) \not\equiv 0$. 将 $x(t)$ 与方程

$$y'' + N^2 y = 0 \tag{6.18}$$

的任何解进行比较，根据定理 6.3, 首先可断言 $x(t)$ 有零点，记为 t_0. 因为 $x(t) \not\equiv 0$, 必有 $x'(t_0) \ne 0$. 不妨设 $x'(t_0) > 0$.

再将 $x(t)$ 与方程 (6.18) 的解 $y = \sin N(t - t_0)$ 比较．由于 $N^2 \le P(t), P(t) \not\equiv N^2$, 而 $\sin N(t - t_0)$ 在 $[t_0, t_0 + 2\pi]$ 上有 $2N + 1$ 个零点，根据定理 6.3, $x(t)$ 在 $(t_0, t_0 + 2\pi)$ 内至少有 $2N$ 个零点．此外， t_0 是 $x(t)$ 的零点，由此及 $x(t)$ 的 2π- 周期性知， $t_0 + 2\pi$ 也是 $x(t)$ 的零点．加在一起， $x(t)$ 在 $[t_0, t_0 + 2\pi]$ 上便至少有 $2N + 2$ 个零点．

假如 $x(t)$ 在 $[t_0, t_0 + 2\pi]$ 上恰好有 $2N + 2$ 个零点，按从小到大的次序记为 $t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_{2N+1}$, 则 $t_{2N+1} = t_0 + 2\pi$. 由于 $x'(t_0) > 0$, 我们依此有：

$$x'(t_1) < 0,\ x'(t_2) > 0,\ \cdots, x'(t_{2N+1}) = x'(t_0 + 2\pi) < 0.$$

然而由 $x(t)$ 的 2π- 周期性，应有

$$x'(t_0+2\pi)=x'(t_0)>0.$$

这一矛盾就证明了 $x(t)$ 在 $[t_0,t_0+2\pi]$ 上至少有 $2N+3$ 个零点. 根据定理 6.3, 由于 $P(t)\le(N+1)^2$, $P(t)\not\equiv(N+1)^2$, 对 $x(t)$ 的任意两个相邻零点 $t_i<t_{i+1}$, 应有 $t_{i+1}-t_i>\frac{\pi}{N+1}$. 若以 t_0 和 t_{2N+2} 分别表 $x(t)$ 的第 1 个和第 $2N+3$ 个零点，则由此导出 $t_{2N+2}-t_0>(2N+2)\cdot\frac{\pi}{N+1}$. 这与 $t_{2N+2}\le t_0+2\pi$ 矛盾. 定理证完. □

习 题

1. 若方程 (6.8) 只有平凡解 $x=0$ 满足狄利克莱边值条件

$$x(0)=0,\quad x(1)=0,$$

则对于 $0\le t\le 1$ 上任意连续函数 $f(t)$, 方程 (6.7) 满足狄利克莱边值条件的解存在而且唯一.

2. 假设 $a(t)$ 和 $b(t)$ 于 $\mathbb{R}^1$ 连续， $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 是方程

$$x''+a(t)x'+b(t)x=0$$

于 $\mathbb{R}^1$ 的两个线性无关解. 证明：1) 对某 t_0, 如果 $\varphi(t_0)=0$, 则 $\psi(t_0)\ne 0$; 2) 对某 $t_1,t_2(t_1<t_2)$, 如果 $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=0$, 则必有 $\xi\in(t_1,t_2)$, 使得 $\psi(\xi)=0$.

3. 假设 $Q(t)$ 于整个 $\mathbb{R}^1$ 连续，恒正. 证明：方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+Q(t)x=0$$

于 t 轴有定义的任一解必有零点.

4. 设 $Q(t),f(t)$ 于 $\mathbb{R}^1$ 连续, 且 $Q(t+\omega)\equiv Q(t),f(t+\omega)\equiv f(t)$. 证明: 若于 $\mathbb{R}^1$, $|Q(t)|>0$, 则方程

$$x'''+Q(t)x=f(t)$$

有唯一的 ω- 周期解.

5. 设 $Q(t),f(t)$ 于 $[0,1]$ 连续. 证明：若于 $[0,1]$, $Q(t)$ 满足下列条件之一：

1) $Q(t)\le\pi^2,Q(t)\not\equiv\pi^2$;

2) 对某一非负整数 N, $N^2\pi^2\le Q(t)\le(N+1)^2\pi^2;Q(t)\not\equiv N^2\pi^2,(N+1)^2\pi^2$,

则边值问题

$$x''+Q(t)x=f(t),\quad x(0)=0=x(1)$$

有唯一解.