§ 7 线性微分方程的一些求解方法

对于一般的线性微分方程，我们很难具体地求出它的解．本节介绍几种求解方法，它们对于某些线性微分方程是有效的．

7.1 适当的变换

最自然的一种想法是，通过自变量或未知函数的适当的变换，将方程化简为可以求解或易于求解的形式．下面举几个例子来演示如何灵活地作变换以达到这样的目的．我们希望通过这些例子能收到举一反三之效．

假设给了下面的方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=f(t). \tag{7.1}$$

如果方程的阶数 $n=1$, 则其通解可以毫无困难地求得．一般说来，方程的阶越高，求解就越困难．自然会想到：通过适当的变换，比如通过形如

$$x=\varphi(t)y \tag{7.2}$$

的变换，将方程的阶降低，这里 $\varphi(t)$ 是待定的函数．将 (7.2) 代入 (7.1), 得到

$$\varphi(t)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+b_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+b_n(t)y=f(t), \tag{7.3}$$

其中

$$b_n(t)=\frac{\mathrm{d}^n\varphi(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}\varphi(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_n(t)\varphi(t).$$

假如 $\varphi(t)$ 是 (7.1) 对应的齐次方程的解，则 $b_n(t)\equiv 0$. 从而在使 $\varphi(t)\neq 0$ 的任何区间上， (7.3) 就化成了关于 $z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的 $n-1$ 阶的正规形方程

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}t^{n-1}}+c_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-2}z}{\mathrm{d}t^{n-2}}+\cdots+c_{n-1}(t)z=g(t), \tag{7.4}$$

其中

$$c_1(t)=\frac{b_1(t)}{\varphi(t)},\cdots,c_{n-1}(t)=\frac{b_{n-1}(t)}{\varphi(t)},\quad g(t)=\frac{f(t)}{\varphi(t)}.$$

综上所述, 假如已经求得 (7.1) 对应的齐次方程的一个非平凡解, 则通过变换 (7.2) 可将解 (7.1) 的问题归结为解低一阶的方程 (7.4). 这种方法就称为 **降阶法**.

以二阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+b(t)x=f(t) \tag{7.5}$$

为例，假如已知对应的齐次方程的一个非平凡解 $\varphi(t)$, 则经过变换 (7.2) 后，得到

$$\varphi(t)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(2\varphi'(t)+a(t)\varphi(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t), \tag{7.6}$$

即 (在使 $\varphi(t)\neq 0$ 的任何区间上)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{(2\varphi'(t)+a(t)\varphi(t))z}{\varphi(t)}=\frac{f(t)}{\varphi(t)}.$$

这是一个一阶线性方程，容易求出它的通解为

$$z=\frac{e^{-\int a(t)\mathrm{d}t}}{\varphi^2(t)}\left(c_1+\int f(t)\varphi(t)e^{\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right).$$

再积分一次就得到原方程的通解.

例 7.1 解方程

$$t(t-1)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=0.$$

解 一眼就看出，它有特解 $x=t$. 于是作变换 $x=ty$ 而将方程化成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.$$

解之得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=c_1\left(1-\frac{1}{t}\right)^2,\quad y=c_1\left(t-2\ln|t|-\frac{1}{t}\right)+c_2.$$

□

以上所述降阶法是选取 $\varphi(t)$ 为原方程的齐次方程的解，使得经变换 (7.2) 后的方程中新的未知函数项 $y(t)$ 的系数 $b_n(t)$ 为零，这样就达到了降阶的目的. 我们也可以选取 $\varphi(t)$, 使得经变换 (7.2) 后的方程中其它某项的系数为零，以期将方程化简为便于求解的形式. 当原方程的齐次方程的非平凡特解不易求得时，这种方法可以一试. 以二阶方程 (7.5) 为例，假如 $\varphi(t)$ 不是它对应的齐次方程的解，则经变换 (7.2) 后的方程

$$\varphi(t)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(2\varphi'(t)+a(t)\varphi(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(\varphi''(t)+a(t)\varphi'(t)+b(t)\varphi(t))\,y=f(t)$$

中 y 的系数就不是零. 这时我们可选取 $\varphi(t)$, 使得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的系数为零:

$$2\varphi'(t)+a(t)\varphi(t)=0.$$

例如取 $\varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}\int a(t)\mathrm{d}t}$, 这样所得方程就变成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\left(b(t)-\frac{a^2(t)+2a'(t)}{4}\right)y=f(t)e^{\frac{1}{2}\int a(t)dt}. \tag{7.7}$$

例 7.2 解方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\sin t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{4}(\sin^2 t+2\cos t+4)x=0.$$

解 不容易找到它的非平凡解，故无法用降阶法．试选取 $\varphi(t)=e^{-\frac{1}{2}\int a(t)\mathrm{d}t}=e^{-\frac{1}{2}\int \sin t\mathrm{d}t}=e^{\frac{1}{2}\cos t}$, 则方程简化成 (7.7) 的形状，而其中的 $b(t)-\frac{a^2(t)+2a'(t)}{4}$ 恰好是常数 1, 而常系数线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=0$$

的通解很容易求出 (见第三章). □

下面再考虑一种线性方程

$$t^n\frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}t^n}+a_1t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=0,$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 都是常数．这种方程的特点是第 $n-k$ 项 $a_{n-k}t^k\frac{\mathrm{d}^kx}{\mathrm{d}t^k}(k=0,1,\cdots,n)$ 的系数有因子 t^k. 这样的方程称为 **欧拉方程** (Euler, 1707-1783). 若记 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 则方程可写成

$$t^nD^nx+a_1t^{n-1}D^{n-1}x+\cdots+a_{n-1}tDx+a_nx=0. \tag{7.8}$$

这样的方程直接求解是很困难的，可幸的是，经过自变量的变换

$$t=\begin{cases} e^s, & t>0,\\ -e^s, & t<0\end{cases} \tag{7.9}$$

可以化成常系数线性方程．事实上，若记 $D_0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$, 则用数学归纳法容易证明：对任何自然数 m, 有

$$t^mD^mx=D_0(D_0-1)\cdots(D_0-m+1)x. \tag{7.10}$$

我们将在第三章详细讨论常系数线性方程的解法．变换 (7.9) 自然是人们经过摸索想出来的．要想找自变量的一个变换 $t=t(s)$, 将 (7.8) 化成常系数线性方程，首先希望 $tDx=\alpha D_0x(\alpha\neq 0$ 为常数), 但 $tDx=\frac{t(s)}{t'(s)}D_0x$, 可见应取 $t(s)$, 使得 $\frac{t(s)}{t'(s)}=\alpha$, 即 $t'(s)-\frac{t(s)}{\alpha}=0$, 而后一方程的解为 $t=ce^{\frac{s}{\alpha}}$.

例 7.3 解方程

$$(t^2D^2-4tD+6)x=t+t^2\ln t,\quad t>0.$$

解　由于我们限于求 $t>0$ 时方程的解，因此，作自变量的变换

$$t=e^s.$$

于是利用公式 (7.10) 得到

$$(D_0(D_0-1)-4D_0+6)x=t+t^2\ln t,$$

即

$$(D_0^2-5D_0+6)x=t+t^2\ln t.$$

它的通解很容易求得 (见第三章). □

习　题

1. 证明：若方程

$$y''+Q(t)y=0,$$

其中 $Q(t)\equiv b(t)-\frac{a^2(t)+2a'(t)}{4}$ 的所有解于 t 的正半轴有界，并且 $t\to+\infty$ 时，$\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\to+\infty$, 则方程

$$x''+a(t)x'+b(t)x=0$$

的所有解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零.

2. 求下列方程的通解：

(1) $t^2x''+t(t-2)x'-(t-2)x=t^3$;

(2) $t(t+1)x''+(t+2)x'-x=0$;

(3) $x''-8tx'+16t^2x=0$;

(4) $tx''+2x'-tx=0$.

7.2　幂级数解法

幂级数解法适用于广泛的一类方程. 下面以二阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+b(t)x=0 \tag{7.11}$$

为例来介绍这种方法. 假设 $a(t)$ 和 $b(t)$ 都在 $t=t_0$ 附近是 **解析的**, 即在 $t=t_0$ 附近可展成 $t-t_0$ 的幂级数：

$$a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t-t_0)^k,\quad b(t)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(t-t_0)^k. \tag{7.12}$$

可以证明：对任意的 x_0, x_0', 方程 (7.11) 都在 $t=t_0$ 附近有满足初值条件

$$x(t_0)=x_0, \quad \frac{\mathrm{d}x(t_0)}{\mathrm{d}t}=x_0' \tag{7.13}$$

的解析解，即存在函数 $x=x(t)$, 它满足初值条件 (7.13), 并且在 $t=t_0$ 附近可展成幂级数

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k. \tag{7.14}$$

证明的方法是：设想初值问题 (7.11), (7.13) 的解 $x(t)$ 在 $t=t_0$ 附近可展成 (7.14). 将 $a(t), b(t)$ 和 $x(t)$ 的展式代入 (7.11) 左端，形式地逐项取微商，经整理，便得到一个幂级数. 然后让它每一项的系数都等于零，便得到一系列联系着 $c_k, k=0,1,\cdots$ 和 $a_k, b_k, k=0,1,\cdots$ 的代数关系式. 利用这些关系式和初值条件 (7.13), 我们可依次将 $c_k, k=0,1,\cdots$ 通过 x_0, x_0' 和 $a_k, b_k, k=0,1,\cdots$ 加以确定. 确定了系数 $c_k, k=0,1,\cdots$, 也就确定了幂级数 (7.14). 可以证明：这样确定出的幂级数 (7.14) 在 $t=t_0$ 附近是收敛的. 这一点一经证明，我们就可以断定：由这一幂级数 (7.14) 表出的解析函数 $x=x(t)$ 在 $t=t_0$ 附近就一定是初值问题 (7.11), (7.13) 的解. 这是因为，幂级数在其收敛域内可以逐项取微商任意多次，根据系数 $c_k, k=0,1,\cdots$ 的确定方式就知道，将 $x=x(t)$ 的表达式 (连同 $a(t), b(t)$ 的表达式 (7.12) 代入 (7.11) 左端后必恒等于零. 至于满足初值条件 (7.13), 根据系数 c_0, c_1 的取法也是明显的. 在这里，我们不准备就一般的方程 (7.11) 来证明按上述方式确定的幂级数 (7.14) 在 $t=t_0$ 附近的收敛性，因为在本书第四章 §4 中，我们将对更一般的方程给出这一论断的证明.

例 7.4 在 $t=0$ 附近求解 **勒让德** (Legendre, 1752-1833) **方程**

$$(1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\alpha(\alpha+1)x=0, \tag{7.15}$$

其中 α 是常数.

解 显然在 $t=0$ 附近，方程的系数都是解析的. 将

$$x=c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$$

代入 (7.15), 得

$$\begin{aligned}(1-t^2)(2\cdot 1c_2+3\cdot 2c_3t+4\cdot 3c_4t^2+\cdots+k(k-1)c_kt^{k-2}+\cdots)&\\ -2t(1\cdot c_1+2\cdot c_2t+\cdots+kc_kt^{k-1}+\cdots)&\\ +\alpha(\alpha+1)(c_0+c_1t+\cdots+c_kt^k+\cdots)&\ \equiv\ 0.\end{aligned}$$

把左端的同幂项合在一起，并令各项的系数为零，得到下列关系式

$$\begin{aligned}
2\cdot 1c_2+\alpha(\alpha+1)c_0 &= 0,\\
3\cdot 2c_3-2\cdot 1c_1+\alpha(\alpha+1)c_1 &= 0,\\
(k+2)(k+1)c_{k+2}-k(k-1)c_k-2kc_k+\alpha(\alpha+1)c_k &= 0,\quad k\geq 2.
\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{-\alpha(\alpha+1)}{2\cdot 1}c_0,\\
c_3 &= \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{3\cdot 2}c_1,\\
c_{k+2} &= \frac{(k-\alpha)(\alpha+k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k,\quad k\geq 2.
\end{aligned}$$

于是当 $m=1,2,\cdots$ 时

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{-\alpha(\alpha+1)}{2!}c_0,\\
c_4 &= \frac{(2-\alpha)(-\alpha)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}c_0,\\
c_{2m} &= \frac{(2m-2-\alpha)\cdots(-\alpha)(\alpha+1)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}c_0,\\
c_3 &= \frac{(1-\alpha)(\alpha+2)}{3!}c_1,\\
c_5 &= \frac{(3-\alpha)(1-\alpha)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}c_1,\\
c_{2m+1} &= \frac{(2m-1-\alpha)\cdots(1-\alpha)(\alpha+2)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}c_1.
\end{aligned}$$

取 $c_0=1,c_1=0$ 和 $c_0=0,c_1=1$, 分别得到

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-2-\alpha)(2m-4-\alpha)\cdots(-\alpha)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}\,t^{2m},\\
x_2(t) &= t+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1-\alpha)(2m-3-\alpha)\cdots(1-\alpha)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}\,t^{2m+1}.
\end{aligned}\tag{7.16}$$

利用达朗贝尔 (D' Alembert, 1717-1783) 判别法容易证明，这两个幂级数的收敛半径为 1. 因此，由它们定义的两个函数在 $|t|<1$ 上都是方程 (7.15) 的解. 从 c_0,c_1 的取法知， $x_1(0)=1,x_1'(0)=0,x_2(0)=0,x_2'(0)=1$, 所以 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 线性无关，因而方程 (7.15) 的通解为

$$x=c_1x_1(t)+c_2x_2(t).$$

从表达式 (7.16) 可以看出：当 α 是自然数时， $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 中有一个是多项式，它就是有名的 **勒让德多项式**. □

假如 $a(t), b(t)$ 在 $t=t_0$ 的邻域内不是解析的，比如

$$a(t)=\frac{p(t)}{t-t_0},\quad b(t)=\frac{q(t)}{(t-t_0)^2},$$

其中 $p(t), q(t)$ 都是 $t=t_0$ 的某邻域内的解析函数，则我们可试求方程 (7.11) 的如下形状的级数解

$$x=(t-t_0)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t-t_0)^k,$$

其中 α 和 $c_k, k=0,1,\cdots$ 都是待定常数， $c_0\neq 0$.

下面看一个重要的特例.

例 7.5 在 $t=0$ 附近解 **贝塞尔** (Bessel, 1784-1846) **方程**

$$t^2x''+tx'+(t^2-n^2)x=0, \tag{7.17}$$

其中 n 为非负实数.

解 令

$$x=c_0t^{\alpha}+c_1t^{\alpha+1}+\cdots+c_kt^{\alpha+k}+\cdots,\quad c_0\neq 0. \tag{7.18}$$

把它代入方程 (7.17) 得

$$\begin{aligned} t^2(\alpha(\alpha-1)c_0t^{\alpha-2}+(\alpha+1)\alpha c_1t^{\alpha-1}& \\ +\cdots+(\alpha+k)(\alpha+k-1)c_kt^{\alpha+k-2}+\cdots)& \\ +t(\alpha c_0t^{\alpha-1}+(\alpha+1)c_1t^{\alpha}+\cdots+(\alpha+k)c_kt^{\alpha+k-1}+\cdots)& \\ +(t^2-n^2)(c_0t^{\alpha}+c_1t^{\alpha+1}+\cdots+c_kt^{\alpha+k}+\cdots)&\ \equiv\ 0. \end{aligned}$$

合并同幂项，并令各项系数为零，就给出

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha-1)c_0+\alpha c_0-n^2c_0 &= 0, \\ (\alpha+1)\alpha c_1+(\alpha+1)c_1-n^2c_1 &= 0, \\ (\alpha+k)(\alpha+k-1)c_k+(\alpha+k)c_k-n^2c_k+c_{k-2} &= 0,\quad k\geq 2. \end{aligned}$$

因为 $c_0\neq 0$, 由第一个方程 (称为指标方程) 可求出 α 的两个值： $\alpha=n, \alpha=-n$.

先考虑 $\alpha=n$ 的情形. 这时有

$$c_1=0,\quad c_k=\frac{-1}{k(2n+k)}c_{k-2},\quad k\geq 2.$$

于是当 $m=1,2,\cdots$ 时， $c_{2m-1}=0$, 且

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-1}{4(n+1)}c_0, \\ c_4 &= \frac{1}{4^2(n+1)(n+2)\cdot 2!}c_0, \\ c_{2m} &= \frac{(-1)^m}{4^m(n+1)(n+2)\cdots(n+m)\cdot m!}c_0. \end{aligned}$$

代入 (7.18) 得到

$$x_1(t)=c_0\left(t^n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m+n}}{4^m(n+1)(n+2)\cdots(n+m)\cdot m!}\right).$$

利用达朗贝尔判别法容易验证，它在整个 t 轴上有定义. 利用 Γ 函数的性质

$$\begin{aligned} \Gamma(n+m+1) &= (n+m)\cdots(n+2)(n+1)\Gamma(n+1), \\ \Gamma(m+1) &= m!, \end{aligned}$$

并取常数 $c_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$, 进一步可得到

$$x_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n},$$

它称为 n **阶贝塞尔函数**.

对于 $\alpha=-n$ 的情形，如果 $2n$ 不等于任何整数，或 $2n$ 等于某个奇数，我们可以类似地求得与 $x_1(t)$ 线性无关的另一解：

$$x_2(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(-n+m+1)\Gamma(m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n},$$

称为 $-n$ **阶贝塞尔函数**. 当 $2n$ 等于某个非零偶数时，不可能从上述递推公式得出与 $\alpha=-n$ 对应的级数解. 因此在这种情形，以及在 $n=0$ 的情形，需要另想办法. 例如应用前述降阶法可得出方程 (7.17) 的通解：

$$x=x_1(t)\left(c_1\int\frac{1}{tx_1^2(t)}\mathrm{d}t+c_2\right).$$

□

习　题

1. 求下列方程在 $t=0$ 附近展开的两个线性无关的级数解：

(1) $x'' - tx' - x = 0$;

(2) $x'' - t^2 x = 0$;

(3) $4tx'' + 2x' - x = 0$;

(4) $tx'' + 4x' - tx = 0$.