§8 线性方程的复值解

迄今我们只限于考虑方程的实值解. 本节将指出, 前面的所有定理都可以推广到复值解的情形. 下一章会看到, 这种推广即使是为了研究实值解也有其必要.

8.1 一些简单的概念

为了定义并研究复值解, 我们先引进有关实变量复值函数的一些简单概念. 如果对任何 $t \in I$, 都有一确定的复数 $u(t)+\mathbf{i}v(t)$ 与之对应, 这里 $u(t), v(t)$ 都是实数, 就说在区间 I 上给出了一个 **实变量的复值函数**, 记为 $z=u(t)+\mathbf{i}v(t)$, 或简记为 $z=\varphi(t)$.

我们说当 $t \to t_0$ 时, 函数 $\varphi(t)=u(t)+\mathbf{i}v(t)$ 的 **极限** 为 $A=\alpha+\mathbf{i}\beta$, 记为 $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=A$, 如果当 $t\to t_0$ 时, 它的实部 $u(t)$ 和虚部 $v(t)$ 分别以 α 和 β 为极限. 函数 $\varphi(t)$ 在 $t=t_0$ 处 **连续** (**或可微**), 是指它的实部 $u(t)$ 和虚部 $v(t)$ 都在 $t=t_0$ 处连续 (或可微). $\varphi(t)$ 在 $t=t_0$ 处的 **微商** 定义为

$$\varphi'(t_0)=u'(t_0)+\mathbf{i}v'(t_0).$$

在这样的定义下, 可直接验证, 熟知的关于两个函数之和, 积, 商的微商公式, 对于实变量的复值函数仍然成立.

函数 $\varphi(t)$ 在 (t_1,t_2) 上 **可积**, 是指它的实部 $u(t)$ 和虚部 $v(t)$ 都在 (t_1,t_2) 上可积; $\varphi(t)$ 在 (t_1,t_2) 上的 **积分** 定义为

$$\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}u(t)\mathrm{d}t+\mathbf{i}\int_{t_1}^{t_2}v(t)\mathrm{d}t.$$

以后我们用的最多的实变量复值初等函数是指数函数, 即形如 $e^{\alpha+\mathbf{i}\beta}$ 的函数, 这里 α 和 β 是实数. 我们按照下述方式来定义这种函数.

大家知道, 对实数 τ, 有

$$e^{\tau}=1+\tau+\frac{\tau^2}{2!}+\cdots+\frac{\tau^k}{k!}+\cdots.$$

实际上, 右端的幂级数可以作为 e^{τ} 的定义. 现以纯虚数 $\mathbf{i}\beta$ 替代上式中的 τ, 并将实部和虚部分开, 于是形式地有

$$e^{\mathbf{i}\beta}=\left(1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\cdots\right)+\mathbf{i}\left(\beta-\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^5}{5!}-\cdots\right),$$

其实部和虚部恰好是 $\cos\beta$ 和 $\sin\beta$ 的展开式. 因此我们自然定义

$$e^{\mathbf{i}\beta}=\cos\beta+\mathbf{i}\sin\beta.$$

由于对任何实数 τ_1, τ_2 有

$$e^{\tau_1+\tau_2} = e^{\tau_1} \cdot e^{\tau_2},$$

我们自然定义

$$e^{\alpha+\mathbf{i}\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta).$$

在这样的定义下，容易验证：对任何复数 λ_1, λ_2, 有

$$e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2}.$$

同样容易验证如下的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}e^{\lambda t}}{\mathrm{d}t} = \lambda e^{\lambda t},$$

其中 λ 为复常数， t 为实变量.

8.2 复值解

有了以上的准备，我们就可以讨论线性方程的复值解了. 尽管我们可以针对方程的系数和非齐次项都是实变量复值函数的情形来进行，为简单计，我们仍一如既往，假设方程的系数和非齐次项都是区间 I 的实值函数，并且是连续的.

和实值解一样，一个实变量的复值向量函数 $\varphi(t)$ 称为方程组 (NH) 在区间 I 上的 **解**, 如果在 I 上， $\varphi'(t)$ 存在且 $\varphi(t)$ 恒满足 (NH).

由于 $a_{ij}(t), f(t)$ 都是实值函数, 显而易见，**一复值向量函数** $\varphi(t) = u(t)+\mathbf{i}v(t)$ **是** (NH) **的解的充要条件是，它的实部** $u(t)$ **是** (NH) **的解，而虚部** $v(t)$ **则是** (LH) **的解**. **特别，一个复值向量函数** $x = \varphi(t) = u(t) + \mathbf{i}v(t)$ **是** (LH) **的解的充要条件是，它的实部** $u(t)$ **和虚部** $v(t)$ **都是** (LH) **的解**.

根据这一事实以及 §2-§4 已经得到的结果，容易看出：关于 (NH) 的初值问题解的存在与唯一性定理以及关于 (LH) 和 (NH) 通解结构的定理等，对于复值解仍然成立. 只不过在存在与唯一性定理中，初值 ξ 可取值 n 维复向量，在通解的表达式中， $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是复常数.

同样可对高阶线性方程引进复值解，并证明类似的结论.