§1　常系数齐次线性方程的解法

在这一节里，我们考虑具常系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = 0.$$

将微分算子 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 记成 D, 并令 $D^2 = DD, \cdots, D^n = D(D^{n-1})$, 则上述方程可以写成

$$D^n x + a_1 D^{n-1}x + \cdots + a_{n-1}Dx + a_n x = 0.$$

若记 $P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$, 则方程可简记为

$$P(D)x = 0. \tag{1.1}$$

如果能看出它的 n 个线性无关的解，则立即可得到它的通解. 但是怎么看出来呢？欧拉提出了一种办法，即待定指数函数法：设想 (1.1) 有指数形式的解：

$$x = e^{\lambda t}, \tag{1.2}$$

其中 λ 是待定常数. 把它代入 (1.1), 反复利用公式 $\dfrac{\mathrm{d}e^{\lambda t}}{\mathrm{d}t} = \lambda e^{\lambda t}$, 就得到

$$P(\lambda)e^{\lambda t} \equiv 0.$$

这表明： (1.2) 是 (1.1) 的解，当且仅当 λ 满足

$$P(\lambda) = 0. \tag{1.3}$$

由此可见，在求解方程 (1.1) 时，多项式 $P(\lambda)$ 很重要，我们称它为方程 (1.1) 的**特征多项式**, 而称 (1.3) 为方程 (1.1) 的 **特征方程**, 其根称为方程 (1.1) 的 **特征根**.

例 1.1 解方程

$$x'' - x = 0.$$

解　与它相应的特征多项式为 $\lambda^2 - 1$, 相应的特征根为 $\lambda = -1$ 和 $\lambda = 1$, 相应的解为 $x = e^{-t}$ 和 $x = e^t$. 这两个解相应的朗斯基行列式

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^t \\ -e^{-t} & e^t \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

即它们线性无关，因而构成一个基本解组，所以原方程的通解是

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t,$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数. □

方程 (1.1) 的特征多项式 $P(\lambda)$ 是 λ 的 n 次多项式. 如果它可以分解为一次因式，即

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_r},$$

其中 $n_1 + \cdots + n_r = n, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$, 则方程 (1.1) 便可以改写为

$$(D - \lambda_1)^{n_1}(D - \lambda_2)^{n_2} \cdots (D - \lambda_r)^{n_r} x = 0,$$

由此知方程

$$(D - \lambda_r)^{n_r} x = 0$$

的解必是方程 (1.1) 的解. 注意到 $(D - \lambda_i)^{n_i}$ 和 $(D - \lambda_j)^{n_j}$ 可以交换次序，因此对每一 $i, i = 1, 2, \cdots, r$, 方程

$$(D - \lambda_i)^{n_i} x = 0 \tag{1.4}$$

的解都是方程 (1.1) 的解. 为了解方程 (1.4), 注意：利用归纳法容易证明公式

$$D^m(e^{\delta t} x(t)) = e^{\delta t}(D + \delta)^m x(t), \tag{1.5}$$

其中 m 为任意正整数， δ 是任何复数. 取 $m = n_i, \delta = -\lambda_i$, 利用 (1.5) 可将方程 (1.4) 化成

$$D^{n_i}(e^{-\lambda_i t} x(t)) = 0,$$

容易看出它的通解为

$$x = (c_1 + c_2 t + \cdots + c_{n_i} t^{n_i - 1}) e^{\lambda_i t},$$

从而得到方程 (1.4) 的一个基本解组：

$$e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \cdots, t^{n_i - 1} e^{\lambda_i t}.$$

令 $i = 1, \cdots, r$, 我们便得到方程 (1.1) 的如下 n 个解：

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{n_1 - 1} e^{\lambda_1 t}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{\lambda_r t},\ te^{\lambda_r t}, \cdots, t^{n_r - 1} e^{\lambda_r t}, \end{gathered}$$

其中每一行中的解彼此是线性无关的.

下面证明：这 n 个解线性无关. 假若不然，则有不全为零的 n 个常数 α_1, $\cdots$, α_n 使得

$$(\alpha_1 + \alpha_2 t + \cdots + \alpha_{n_1} t^{n_1 - 1}) e^{\lambda_1 t} + \cdots + (\alpha_{n - n_r + 1} + \cdots + \alpha_n t^{n_r - 1}) e^{\lambda_r t} \equiv 0,$$

或简记为

$$p_1(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots+p_r(t)e^{\lambda_r t}\equiv 0, \tag{1.6}$$

其中 $p_1(t),\cdots,p_r(t)$ 都是多项式，由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不全为零，多项式 $p_1(t),\cdots,p_r(t)$ 中至少有一个是非零的，不妨认为 $p_1(t)$ 是非零多项式．现以 $e^{-\lambda_r t}$ 乘 (1.6) 两端，然后微商 n_r 次，再用 $e^{\lambda_r t}$ 乘两端，便得

$$p_{11}(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots+p_{(r-1)1}(t)e^{\lambda_{r-1} t}\equiv 0, \tag{1.7}$$

其中 $p_{i1}(t)$ 仍是一多项式， 且其次数与 $p_i(t)$ 的次数相同．接着再以 $e^{-\lambda_{r-1}t}$ 乘 (1.7) 两端，微商 n_{r-1} 次，然后用 $e^{\lambda_{r-1}t}$ 乘，进而得

$$p_{12}(t)e^{\lambda_1 t}+\cdots+p_{(r-2)2}(t)e^{\lambda_{r-2} t}\equiv 0,$$

其中 $p_{i2}(t)$ 是次数与 $p_{i1}(t)$ 的次数，从而也与 $p_i(t)$ 次数相同的多项式．如此继续下去，经 $r-1$ 步便得到

$$p_{1(r-1)}(t)e^{\lambda_1 t}\equiv 0, \tag{1.8}$$

其中 $p_{1(r-1)}(t)$ 是次数与 $p_1(t)$ 次数相同的多项式, 因而是非零多项式. 但要 (1.8) 成立，除非 $p_{1(r-1)}(t)$ 是零多项式，矛盾．因此我们有如下定理：

定理 1.1 *如果方程 (1.1) 的特征多项式 $P(\lambda)$ 可以分解为*

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r},$$

其中 $n_1+\cdots+n_r=n, \lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$, 则函数组

$$\begin{array}{c} e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\cdots,t^{n_1-1}e^{\lambda_1 t},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ e^{\lambda_r t},\ te^{\lambda_r t},\cdots,t^{n_r-1}e^{\lambda_r t} \end{array}$$

是方程 (1.1) 的一个基本解组.

例 1.2 解方程

$$x^{(5)}-3x^{(4)}+2x'''=0.$$

解　写出特征多项式，并作因子分解：

$$P(\lambda)=\lambda^5-3\lambda^4+2\lambda^3=\lambda^3(\lambda-2)(\lambda-1).$$

可见特征根是 0(3 重),1(1 重) 和 2(1 重). 因此相应的基本解组为

$$1,\ t,\ t^2,\ e^t,\ e^{2t},$$

从而通解便是

$$x=c_1+c_2t+c_3t^2+c_4e^t+c_5e^{2t}.$$

□

例 1.3 解方程

$$x^{(5)} - 3x^{(4)} + 4x''' - 4x'' + 3x' - x = 0.$$

解 写出它的特征多项式，并分解因子，有

$$P(\lambda) = \lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda + \mathbf{i})(\lambda - \mathbf{i}).$$

可见特征根是 1(3 重), $\mathbf{i}$(1 重), $-\mathbf{i}$(1 重), 相应的基本解组为

$$e^t,\ te^t,\ t^2e^t,\ e^{\mathbf{i}t},\ e^{-\mathbf{i}t},$$

通解为

$$x = (c_1 + c_2t + c_3t^2)e^t + c_4e^{\mathbf{i}t} + c_5e^{-\mathbf{i}t},$$

其中任意常数 $c_1, \cdots, c_5$ 可以是复数. □

由于特征多项式可能有不是实数的根，因此定理 1.1 给出的基本解中有的可能不是实值函数. 能否进一步得到全部都由实值函数构成的基本解组呢？回答是肯定的.

事实上，由于 (1.1) 的系数 a_i 都是实的，它的特征多项式是实系数多项式，因此若复数 $\lambda_0 = \alpha + \mathbf{i}\beta$ 是 n_0 重特征根，则其共轭复数 $\bar{\lambda}_0 = \alpha - \mathbf{i}\beta$ 也是 n_0 重特征根. 定理 1.1 给出的基本解组中将同时出现

$$e^{\lambda_0 t},\ te^{\lambda_0 t}, \cdots, t^{n_0-1}e^{\lambda_0 t}, \tag{1.9}$$

$$e^{\bar{\lambda}_0 t},\ te^{\bar{\lambda}_0 t}, \cdots, t^{n_0-1}e^{\bar{\lambda}_0 t}. \tag{1.10}$$

把 (1.9) 与 (1.10) 中各对应函数分别相加后除以 2 和分别相减后除以 $2\mathbf{i}$, 便得到 $2n_0$ 个实值解:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots, t^{n_0-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{n_0-1}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

其实，它们就是 (1.9) 中各函数的实部和虚部. 以它们替代基本解组中的 (1.9) 和 (1.10), 并且对其它复的特征根也做如此替代，就可得到一个实的基本解组；它们之间线性无关是明显的，因为原基本解组中的每一个解，都可以表示成这组解的线性组合.

例 1.4 求例 1.3 中方程的实基本解组.

解 注意

$$e^{\mathbf{i}t} = \cos t + \mathbf{i}\sin t.$$

故有实基本解组

$$e^t,\ te^t,\ t^2e^t,\ \cos t,\ \sin t.$$

□

习 题

1. 求下列方程的一个实的基本解组：

(1) $x^{(7)}-2x^{(5)}+x^{(3)}=0$;

(2) $x'''+x''-2x=0$;

(3) $x'''-5x''+8x'-4x=0$;

(4) $x^{(4)}+4x=0$.

2. 已知 a,b 都是正数. 证明当 $t\to+\infty$ 时方程

$$x''+ax'+bx=0$$

的每一解都趋于零.

3. 若 $P(\lambda)$ 的每个特征根都有负实部，并且于 $\mathbb{R}^1$, $f(t+\omega)\equiv f(t)$, 则非齐次线性方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_nx=f(t)$$

有唯一的 ω- 周期解.