§2 常系数齐次线性方程组的解法

现在转到常系数齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax, \tag{2.1}$$

其中 x 是 n 维向量， A 是 $n\times n$ 常矩阵.

2.1 矩阵指数函数 e^{At}

设 x_0 为任意 n 维常向量. 由第二章定理 2.1 知，方程组 (2.1) 满足初值条件 $x(0)=x_0$ 的解 $\varphi(t)$ 于 $-\infty<t<\infty$ 上存在且唯一. 把它代入 (2.1), 并对它从 0 到 t 积分，可得

$$\varphi(t) \equiv x_0 + A\int_0^t \varphi(t_1)\mathrm{d}t_1. \tag{2.2}$$

迭代一次，即把 (2.2) 代入 (2.2) 右端的积分号下，进而得

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\equiv x_0 + A\int_0^t \left(x_0 + A\int_0^{t_1}\varphi(t_2)\mathrm{d}t_2\right)\mathrm{d}t_1\\ &\equiv (E+At)x_0 + A^2\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\varphi(t_2)\mathrm{d}t_2,\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 E 是单位矩阵. 如此迭代 m 次，便得

$$\varphi(t) \equiv \Phi_m(t)x_0 + R_m(t), \tag{2.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\Phi_m(t) &= E + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{m!}(At)^m,\\ R_m(t) &= A^{m+1}\int_0^t \mathrm{d}t_1\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{t_m}\varphi(t_{m+1})\mathrm{d}t_{m+1}.\end{aligned}$$

当 $m\to\infty$ 时 $\Phi_m(t)$ 显然收敛. 下面证明

$$R_m(t)\to 0,\quad m\to\infty.$$

为此，对每一给定的 t, 在以 0 与 t 为端点的区间上， $|\varphi(s)|$ 有界. 设 M 是它的一个上界. 则

$$|R_m(t)| \le M|A|^{m+1}\frac{1}{(m+1)!}|t|^{m+1} \to 0,\quad m\to\infty.$$

由此知，在 (2.4) 中令 $m \to \infty$, 便得

$$\varphi(t) = \Phi(t)x_0,$$

其中

$$\Phi(t) = E + At + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots. \tag{2.5}$$

$\Phi(t)$ 正是 (2.1) 的一个基本解矩阵，满足 $\Phi(0) = E$.

当 $n = 1$, 即 A 是数， $E = 1$ 时， (2.5) 的右端就是 e^{At} 的展开式. 所以我们自然定义

$$e^{At} = E + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots. \tag{2.6}$$

这样定义的矩阵函数具有下列性质：

1. e^{At} 是 (2.1) 的基本解矩阵，或者确切地说， $X = e^{At}$ 是下述矩阵初值问题的解：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX, \quad X(0) = E;$$

2. $Ae^{At} \equiv e^{At}A$;
3. e^{At} 的逆矩阵是 e^{-At};
4. 若矩阵 A 和 B 乘法可交换，即 $AB = BA$, 则

$$e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}. \tag{2.7}$$

特别，由于 At 和 $-At_0$ 乘法可交换，因此有

$$e^{At} \cdot e^{-At_0} = e^{A(t-t_0)}.$$

性质 1 和 2 是明显的. 我们只证性质 3 和性质 4. 为此，记

$$\psi(t) = e^{At}e^{Bt}e^{-(A+B)t}.$$

由于 $AB = BA$, 因此从定义易见

$$Ae^{Bt} \equiv e^{Bt}A,$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = e^{At}(Ae^{Bt} + e^{Bt}B - e^{Bt}(A+B))e^{-(A+B)t} \equiv 0.$$

又 $\psi(0) = E$, 故 $\psi(t) \equiv E$. 取 $B = -A$, 就推出性质 3. 由此可见 (2.7) 成立.

应用矩阵指数函数 $e^{A(t-t_0)}$, 常系数齐次线性方程组 (2.1) 满足初值条件

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.8}$$

的解可以表示成

$$x = e^{A(t-t_0)}x_0;$$

而常系数非齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + f(t)$$

满足初值条件 (2.8) 的解则可以表示成

$$x = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)\mathrm{d}s,$$

只要向量函数 $f(t)$ 于区间 I 上连续， $t_0 \in I$.

2.2 基本解矩阵的结构

下面我们分析基本解矩阵 e^{At} 的具体结构.

首先考虑简单情形：

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由于

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

因此

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

特别，当 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$, 即 $A = \lambda_1 E$ 时,

$$e^{\lambda_1 E t} = e^{\lambda_1 t}E.$$

其次，考虑稍为复杂的情形：

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + Z, \\
Z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

由于矩阵 λEt 和 Zt 乘法可交换，因此

$$e^{At} = e^{(\lambda E + Z)t} = e^{\lambda Et} e^{Zt} = e^{\lambda t} e^{Zt}.$$

注意到

$$
\begin{aligned}
Z^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \\
Z^{n-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad Z^n = 0,
\end{aligned}
$$

即见

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= e^{\lambda t}\left(E + Zt + Z^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + Z^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right) \\
&= e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

最后，考虑一般情形. 由线性代数知道，若 A 的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$ 的分解式为

$$
\det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda - \lambda_r)^{n_r}, \tag{2.10}
$$

其中 $n_1 + \cdots + n_r = n, \lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$, 则存在 n 阶非奇异常数矩阵 T, 使得

$$
A = TJT^{-1}, \tag{2.11}
$$

其中 J 为 A 的约当 (Jordan, 1838-1921) 标准形，即

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{im_i} \end{pmatrix}, \\
J_{ij} &= \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

此处 $i = 1, \cdots, r$; $j = 1, \cdots, m_i$; J_i 是 n_i 阶矩阵，包含了对应于特征根 λ_i 的全部约当小块 $J_{i1}, \cdots, J_{im_i}$; 而约当小块 J_{ij} 的阶数为 $k_{ij}, k_{i1} + \cdots + k_{im_i} = n_i$. 于

是

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (TJT^{-1})^k \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} TJ^kT^{-1} \frac{t^k}{k!} = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} J^k \frac{t^k}{k!}\right) T^{-1} \\
&= T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_r^k \end{pmatrix} \frac{t^k}{k!}\right) T^{-1} \\
&= T \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_r t} \end{pmatrix} T^{-1} \\
&= T \begin{pmatrix} e^{J_{11} t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{rm_r} t} \end{pmatrix} T^{-1},
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

其中

$$
e^{J_{ij}t} = e^{\lambda_i t}\left(E_{ij} + Z_{ij}t + \cdots + Z_{ij}^{k_{ij}-1} \frac{t^{k_{ij}-1}}{(k_{ij}-1)!}\right), \tag{2.14}
$$

E_{ij} 是 k_{ij} 阶单位矩阵， Z_{ij} 是类似于 Z 的 k_{ij} 阶矩阵.

为了便于实际计算，我们将代替 e^{At} 而选用基本解矩阵 $e^{At}T$.

定理 2.1 *如果方程组 (2.1) 的系数矩阵 A 的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$ 的分解式为 (2.10), T 是化 A 为约当标准形 J 的 n 阶非奇异常矩阵，满足 (2.11), J 的形状如 (2.12), 其中 J_i 是 n_i 阶矩阵 $(i = 1, \cdots, r, n_1 + \cdots + n_r = n)$, 包含了对应于特征根 λ_i 的全部约当小块 $J_{i1}, \cdots, J_{im_i}$, 而约当小块 J_{ij} 的阶数为 $k_{ij}, k_{i1} + \cdots + k_{im_i} = n_i$, 则*

$$
T\mathrm{diag}(e^{J_{11}t}, \cdots, e^{J_{rm_r}t}) = T \begin{pmatrix} e^{J_{11} t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{rm_r} t} \end{pmatrix} \tag{2.15}
$$

是 (2.1) 的基本解矩阵，其中 $e^{J_{ij}t}$ 的结构如 (2.14) 所示.

证明 取 $\Phi(t)=e^{At}T$, 则

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}=Ae^{At}T=A\Phi(t),$$

又 $\Phi(0)=T$ 是非奇异的，故 $\Phi(t)$ 是 (2.1) 的基本解矩阵. 而由 (2.13) 知，$\Phi(t)=e^{At}T$ 就是 (2.15). □

习 题

1. 设方程组 (2.1) 有解 $x=p(t)e^{\lambda t}$, 这里 λ 是常数， $p(t)$ 是 n 维向量，其分量都是 t 的多项式，这些多项式的次数最高为 k. 证明向量函数

$$e^{\lambda t}p(t),e^{\lambda t}\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t},\cdots,e^{\lambda t}\frac{\mathrm{d}^k p(t)}{\mathrm{d}t^k}$$

是 (2.1) 的 $k+1$ 个线性无关的解.

2. 设 $\Phi(t)$ 是 (2.1) 的任一基本解矩阵. 证明：

1) 对任意 $\tau\in\mathbb{R}^1$, $\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)=\Phi(t-\tau)$;

2) 若特征多项式 $\det(A-\lambda E)$ 的每一根都有负实部，则存在正常数 a,α, 使得

$$|\Phi(t-\tau)|\le ae^{-\alpha(t-\tau)},\quad t,\tau\in\mathbb{R}^1.$$

3. 证明方程组 (2.1) 有非零 ω- 周期解的充要条件是系数矩阵 A 至少有一形如 $\mathbf{i}\frac{2\pi k}{\omega}$ 的特征根，这里 k 是整数.

4. 若特征多项式 $\det(A-\lambda E)$ 的每一根都有非零实部，则方程组 (2.1) 只有平凡的周期解 $x=0$. 因此方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+f(t)\tag{E}$$

有唯一的 ω- 周期解，只要 $f(t)$ 连续，并且 $f(t+\omega)\equiv f(t)$.

5. 设实 n 阶矩阵 A 有 k 个实部为正的特征根， $n-k$ 个实部为负的特征根. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间 S 和 U, 具有 $\mathbb{R}^n=S\bigoplus U$(直和), 使得

1) 对任意 $x_0\in S$, (2.1) 的解 $x(t,t_0,x_0)\to 0,t\to+\infty$;

2) 对任意 $x_0\in U$, (2.1) 的解 $x(t,t_0,x_0)\to 0,t\to-\infty$;

3) (2.1) 有唯一的于 $\mathbb{R}^1$ 有界的解 $x=0$;

4) 设 $f(t)$ 连续. 则方程 (E) 仅有唯一的于 $\mathbb{R}^1$ 有界的解；当 $f(t)$ 有界时，方程 (E) 有唯一的于 $\mathbb{R}^1$ 有界的解：

$$x=\int_{-\infty}^{t}e^{At}Qe^{-As}f(s)\mathrm{d}s-\int_{t}^{+\infty}e^{At}Pe^{-As}f(s)\mathrm{d}s,\tag{F}$$

其中 Q 和 P 分别是 $\mathbb{R}^n \to U$ 和 $\mathbb{R}^n \to S$ 的正投影矩阵;

5) 设 $f(t)$ 连续，且 $f(t+\omega) \equiv f(t)$. 则方程 (E) 有唯一的 ω- 周期解，其表达式由 (F) 给出.

2.3 待定系数法

比较定理 1.1 和 2.1 可知，为了计算一个基本解组，对于 n 阶齐次线性方程 (1.1), 只须知道相应的特征根及其重数；而对齐次线性方程组 (2.1), 仅仅知道系数矩阵 A 的特征根及其重数是不够的，还要知道把 A 化成约当标准形的 n 阶非奇异常矩阵 T, 以及对应于每个特征根 λ_i 的全部约当小块的数目 m_i 和这些约当小块的阶数 k_{ij}. 然而这样的矩阵 T 至今还没有比较简捷有效的算法. 在具体求 (2.1) 的基本解组时，下述定理比定理 2.1 实用.

定理 2.2 *如果方程组 (2.1) 的系数矩阵 A 的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$ 的分解式为 (2.10), 则对 A 的每一特征根 $\lambda_i, i = 1, \cdots, r$, 方程组 (2.1) 有形如*

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} \tag{2.16}$$

的 n_i 个线性无关的解，其中 $p_1(t), \cdots, p_n(t)$ 都是次数小于 n_i 的多项式，并且只要对每一 λ_i 能求出 n_i 个形如 (2.16) 的线性无关的解，那么把它们合在一起就是方程组 (2.1) 的一个基本解组.

证明 注意， (2.1) 的基本解矩阵 (2.15) 可以表示为

$$T \mathrm{diag}(e^{J_1 t}, \cdots, e^{J_r t}),$$

由此即见定理的前一半成立.

再证后一半. 设对每一 λ_i 已求出 n_i 个形如 (2.16) 的线性无关的解. 由于 $n_1 + \cdots + n_r = n$, 只须证明把它们合在一起还是线性无关的. 但这一事实的证明完全类同于定理 1.1 相应部分的证明 (参见 (1.6)). □

假设 (2.1) 的系数矩阵 A 的特征多项式 $\det(\lambda E - A)$ 的分解式为 (2.10). 由定理 2.2 知，对应于特征根 λ_i, (2.1) 有 n_i 个形如 (2.16), 即形如

$$x = \left(h_0 + h_1 t + \cdots + h_{n_i - 1} \frac{t^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \right) e^{\lambda_i t} \tag{2.17}$$

的线性无关解, 其中 $h_0, h_1, \cdots, h_{n_i - 1}$ 均系待定的 n 维常向量. 为确定这些系数,

我们将 (2.17) 代入 (2.1) 两边，消去 $e^{\lambda_i t}$, 比较 t 的同次幂的系数，可得

$$\begin{cases} (A-\lambda_i E)h_0 = h_1, \\ (A-\lambda_i E)h_1 = h_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A-\lambda_i E)h_{n_i-2} = h_{n_i-1}, \\ (A-\lambda_i E)h_{n_i-1} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (A-\lambda_i E)^{n_i} h_0 = 0, & \\ h_1 = (A-\lambda_i E)h_0, & \\ h_2 = (A-\lambda_i E)h_1, & \text{或} \quad h_2 = (A-\lambda_i E)^2 h_0, \\ h_3 = (A-\lambda_i E)h_2, & \text{或} \quad h_3 = (A-\lambda_i E)^3 h_0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_{n_i-1} = (A-\lambda_i E)h_{n_i-2}, & \text{或} \quad h_{n_i-1} = (A-\lambda_i E)^{n_i-1} h_0. \end{cases} \tag{2.18}$$

这就提供了求 (2.1) 的基本解组的一种待定系数法．具体步骤如下：

1. 求出多项式 $\det(A-\lambda E)$ 全部互异的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 及其重数 $n_1,\cdots,n_r$;

2. 对每一 λ_i, 先从 (2.18) 第一式解出 n_i 个线性无关的 h_0, 然后从 (2.18) 的其它各式得出相应的 $h_1,\cdots,h_{n_i-1}$, 最后代入 (2.17) 而得 λ_i 所对应的 n_i 个线性无关的解．将与所有 λ_i, $i=1,\cdots,r$ 对应的这些解合在一起，便是 (2.1) 的一个基本解组.

注 2.1 *无论是定理 2.1, 2.2, 还是待定系数法，都与定理 1.1 一样，有一个特征多项式的分解问题，特征根中有的可能是复数．此外，用以化矩阵 A 为约当形 J 的矩阵 T, 以及从 (2.18) 解出的 h_k, 都有可能是复的，因此所得到的可能是复值的基本解组．由于方程组 (2.1) 的系数矩阵 A 是实的，我们很容易进一步求得 (2.1) 的实值基本解组.*

例 2.1 求下述方程组

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

的一个基本解组.

解 由

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}4-\lambda & -1 & 0\\ 3 & 1-\lambda & -1\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^3$$

知特征根为 2, 其重数为 3, 故该方程组有如下形式的三个线性无关的解:

$$x=\left(h_0+h_1t+h_2\frac{t^2}{2!}\right)e^{2t},$$

其中 h_k 满足

$$\begin{cases}(A-2E)^3h_0=0,\\ h_1=(A-2E)h_0,\\ h_2=(A-2E)^2h_0.\end{cases}\tag{2.19}$$

注意

$$\begin{aligned}A-2E &= \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix},\\ (A-2E)^2 &= \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\\ (A-2E)^3 &= 0.\end{aligned}$$

从 (2.19) 的第一式可得到三个线性无关的 h_0, 譬如取

$$h_0:\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

从 (2.19) 的其余两式依次可得相应的 h_1 和 h_2:

$$h_1:\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad h_2:\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

从而得到基本解组:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}\right)e^{2t},$$

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}\right)e^{2t},$$

$$\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2}\right)e^{2t}.$$

□

例 2.2 求方程组

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

的一个基本解组.

解 由

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\1&1-\lambda&0\\3&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)((\lambda-1)^2+4)$$

知特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1+2\mathbf{i},\lambda_3=1-2\mathbf{i}$, 它们都是单根. 因此该方程组有形如

$$h_1e^t,\ h_2e^{(1+2\mathbf{i})t},\ h_3e^{(1-2\mathbf{i})t}$$

的基本解组, 其中 h_1,h_2,h_3 满足

$$(A-\lambda_1E)h_1=0,\ (A-\lambda_2E)h_2=0,\ (A-\lambda_3E)h_3=0.$$

由于

$$
\begin{aligned}
A-\lambda_1 E &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A-\lambda_2 E &= \begin{pmatrix} -2\mathbf{i} & -1 & -1 \\ 1 & -2\mathbf{i} & 0 \\ 3 & 0 & -2\mathbf{i} \end{pmatrix}, \\
A-\lambda_3 E &= \overline{(A-\lambda_2 E)},
\end{aligned}
$$

故可以取

$$
h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ h_2 = \begin{pmatrix} 2\mathbf{i} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ h_3 = \begin{pmatrix} -2\mathbf{i} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},
$$

从而得到复基本解组：

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad \begin{pmatrix} 2\mathbf{i} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+2\mathbf{i})t}, \quad \begin{pmatrix} -2\mathbf{i} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1-2\mathbf{i})t}.
$$

因为

$$
\begin{pmatrix} 2\mathbf{i} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+2\mathbf{i})t} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} e^t + \mathbf{i} \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix} e^t,
$$

所以有实基本解组：

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} e^t, \quad \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix} e^t.
$$

□

习　题

1. 求下列方程组的实通解：

(1) $x' = 2x - 3y,\ y' = x - 2y;$

(2) $x' = x - 2y,\ y' = x - y;$

(3) $x' = y + z,\ y' = x - z,\ z' = x - y;$

(4) $x' = y - z,\ y' = x + y,\ z' = x + z;$

(5) $x' = y - 5z,\ y' = -5x + 3y,\ z' = x - 3z.$