§ 3　算子解法与拉氏变换法

3.1　算子解法

先考虑常系数非齐次线性方程

$$P(D)x = f(t), \tag{3.1}$$

其中 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 而

$$P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n.$$

第一节介绍了齐次线性方程

$$P(D)x = 0 \tag{3.2}$$

的基本解组的求法. 在求出了 (3.2) 的一个基本解组后，利用常数变易公式 (见前一章定理 4.2′), 便可以求出 (3.1) 的通解. 但是，常数变易公式用来求解比较麻烦，对于某些比较简单的函数 $f(t)$, 我们可以直接看出或通过比较简单的计算得出 (3.1) 的一个特解，从而应用前一章定理 4.1′, 得到 (3.1) 的通解.

我们知道，求 $f(t)$ 的原函数，等价于求解微分方程

$$Dx = f(t). \tag{3.3}$$

形式地把它的解 $x = \int f(t)\mathrm{d}t$ 记为

$$x = \frac{1}{D} f(t).$$

则 $\frac{1}{D} f(t)$ 表示这样一个函数，以 D 作用后等于 $f(t)$. 注意，这时 $\frac{1}{D} f(t)$ 不是唯一确定的，它代表的诸函数间可以相差 $Dx = 0$ 的一个解. 同理，我们把方程 (3.1) 的解记为

$$x = \frac{1}{P(D)} f(t),$$

即用 $\frac{1}{P(D)} f(t)$ 表示这样一个函数，以 $P(D)$ 作用后等于 $f(t)$. 这时 $\frac{1}{P(D)} f(t)$ 也不是唯一确定的，它代表的诸函数间可以相差 (3.2) 的一个解.

由算子 $P(D)$ 的性质，不难推出 $\frac{1}{P(D)}$ 具有下列性质:

1. 对常数 c_1 和 c_2, 有

$$\frac{1}{P(D)}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) = c_1 \frac{1}{P(D)} f_1(t) + c_2 \frac{1}{P(D)} f_2(t).$$

2. 若 $P(D) = P_1(D) \cdot P_2(D)$, 则

$$\frac{1}{P(D)} f(t) = \frac{1}{P_1(D)} \left\{ \frac{1}{P_2(D)} f(t) \right\} = \frac{1}{P_2(D)} \left\{ \frac{1}{P_1(D)} f(t) \right\}.$$

3. 对任何常数 δ, 有

$$\frac{1}{P(D)}(e^{\delta t}f(t)) = e^{\delta t}\frac{1}{P(D+\delta)}f(t).$$

4. 若 $f_k(t)$ 是关于 t 的 k 次多项式，则当 $P(0)=a_n\neq 0$ 时，有

$$\frac{1}{P(D)}f_k(t) = Q_k(D)f_k(t),$$

其中 $Q_k(D)$ 是 D 的 k 次多项式，它是将 $P(D)$ 按 D 的升幂排列后用通常的多项式除法去除 1, 在第 $k+1$ 步上得到的商式；当 $P(0)=a_n=0$ 时，设 $P(D)=D^rP_1(D)$, 其中 $P_1(0)\neq 0$. 则有

$$\frac{1}{P(D)}f_k(t) = \frac{1}{D^r}\{q_k(D)f_k(t)\},$$

其中 $q_k(D)$ 是 D 的 k 次多项式，它是将 $P_1(D)$ 按 D 的升幂排列后用通常的多项式除法去除 1, 在第 $k+1$ 步上得到的商式.

5. 设 $f_k(t)$ 是关于 t 的 k 次多项式， λ,ω 是实数．则

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f_k(t)\cos\omega t &= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{P(D)}e^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)t}f_k(t)\right\},\\ \frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}f_k(t)\sin\omega t &= \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{P(D)}e^{(\lambda+\mathrm{i}\omega)t}f_k(t)\right\},\end{aligned}$$

其中 Re 和 Im 分别表示实部和虚部.

性质 1, 2 和 5 是显然的．我们只证明性质 3, 4. 为证性质 3, 注意在 (1.5) 中取 $x(t)=\frac{f(t)}{P(D+\delta)}$, 我们有

$$D^k(e^{\delta t}\cdot\frac{1}{P(D+\delta)}f(t)) = e^{\delta t}(D+\delta)^k\cdot\frac{1}{P(D+\delta)}f(t).$$

于是,

$$\begin{aligned}&P(D)(e^{\delta t}\cdot\frac{1}{P(D+\delta)}f(t))\\ =\ &(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)(e^{\delta t}\cdot\frac{1}{P(D+\delta)}f(t))\\ =\ &e^{\delta t}((D+\delta)^n+a_1(D+\delta)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(D+\delta)+a_n)\frac{1}{P(D+\delta)}f(t)\\ =\ &e^{\delta t}P(D+\delta)\frac{1}{P(D+\delta)}f(t) = e^{\delta t}f(t).\end{aligned}$$

再证性质 4. 当 $P(0)=a_n\neq 0$ 时，如果把 $P(D)$ 看成普通的多项式，则由假设有

$$\frac{1}{P(D)}=Q_k(D)+\frac{R(D)}{P(D)},$$

即

$$1=P(D)Q_k(D)+R(D),$$

其中 $R(D)$ 是把 $P(D)$ 按 D 的升幂排列后用通常的多项式除法去除 1 时在第 $k+1$ 步上得到的余式，它是从 D 的 $k+1$ 次开始按 D 的升幂排列直到 $k+n$ 次的 D 的多项式. 由于算子多项式的加法和乘法运算与普通多项式是一样的，因此上述等式对于算子多项式也成立. 把上式两端同时作用到 $f_k(t)$, 得

$$f_k(t)=P(D)Q_k(D)f_k(t),$$

这就是所要证明的.

当 $P(0)=a_n=0, P(D)=D^rP_1(D), P_1(0)\neq 0$ 时，利用性质 4 的前一部分和性质 2 即见所要证明的结论成立.

对于广泛的一类函数 $f(t)$, 只要灵活运用性质 1-5, 便可通过较简单的计算而求出方程 (3.1) 的一个特解.

例 3.1 求 $\frac{1}{D^r}1$, 其中 r 是自然数.

解 从定义出发，显然有

$$\frac{1}{D^r}1=\frac{t^r}{r!}.$$

□

例 3.2 求 $\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}$, 其中 λ 是常数， $P(\lambda)\neq 0$.

解 依次利用性质 3 和 4, 有

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda t}=e^{\lambda t}\frac{1}{P(D+\lambda)}1=\frac{e^{\lambda t}}{P(\lambda)}.$$

□

例 3.3 求 $\frac{1}{(D-\lambda)^rQ(D)}e^{\lambda t}$, 其中 r 是自然数， λ 是常数， $Q(\lambda)\neq 0$.

解 依次利用性质 2, 例 3.2, 性质 3 和例 3.1, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{(D-\lambda)^rQ(D)}e^{\lambda t} &= \frac{1}{(D-\lambda)^r}\left\{\frac{1}{Q(D)}e^{\lambda t}\right\}\\ &= \frac{1}{(D-\lambda)^r}\frac{e^{\lambda t}}{Q(\lambda)}=\frac{e^{\lambda t}}{Q(\lambda)}\frac{1}{D^r}1=\frac{t^re^{\lambda t}}{Q(\lambda)r!}.\end{aligned}$$

□

例 3.4 求 $\frac{1}{D^2+\omega^2}\cos\omega t$ 和 $\frac{1}{D^2+\omega^2}\sin\omega t$, 其中 ω 是非零实数.

解 依次利用性质 3,2 和例 3.2 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2+\omega^2}e^{\mathbf{i}\omega t} &= e^{\mathbf{i}\omega t}\frac{1}{(D+\mathbf{i}\omega)^2+\omega^2}1\\ &= e^{\mathbf{i}\omega t}\frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D+2\omega\mathbf{i}}1\right\}\\ &= e^{\mathbf{i}\omega t}\frac{t}{2\omega\mathbf{i}}=\frac{t}{2\omega}(-\mathbf{i}\cos\omega t+\sin\omega t).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2+\omega^2}\cos\omega t=\frac{t}{2\omega}\sin\omega t,\\ \frac{1}{D^2+\omega^2}\sin\omega t=-\frac{t}{2\omega}\cos\omega t.\end{aligned}$$

□

例 3.5 求 $\frac{1}{D^2+3D+2}e^{e^t}$.

解 利用性质 2 和 3, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^2+3D+2}e^{e^t} &= \frac{1}{D+2}\left\{\frac{1}{D+1}e^{e^t}\right\}=\frac{1}{D+2}\left\{e^{-t}\frac{1}{D}e^te^{e^t}\right\}\\ &= \frac{1}{D+2}e^{-t}e^{e^t}=e^{-2t}\frac{1}{D}e^te^{e^t}=e^{-2t}e^{e^t}.\end{aligned}$$

□

算子解法也可以用于常系数线性方程组. 先看一个例子.

例 3.6 解方程组

$$\begin{cases}x'=2x+y+e^{2t}+3t-1,\\ y'=x+2y+2e^{2t}+9t-6.\end{cases}\tag{3.4}$$

解 利用算子 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 可将方程组写成

$$\begin{cases}(D-2)x-y=e^{2t}+3t-1,\\ -x+(D-2)y=2e^{2t}+9t-6.\end{cases}$$

为了求解, 可采用消去法, 比如, 为了消去 y, 只须以算子 $D-2$ 作用于第一式, 然后与第二式相加. 于是得到关于 x 的方程

$$((D-2)^2-1)x=2e^{2t}+3t-1.$$

利用前述方法解之可得

$$x=c_1e^t+c_2e^{3t}-2e^{2t}+t+1.$$

再代入原方程的第一式，进而得

$$y = -c_1e^t + c_2e^{3t} - e^{2t} - 5t.$$

□

再考虑一般的常系数线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}(D)x_1 + \cdots + a_{1n}(D)x_n = f_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}(D)x_1 + \cdots + a_{nn}(D)x_n = f_n(t), \end{cases} \tag{3.5}$$

其中 $a_{ij}(D), i, j = 1, \cdots, n$ 都是算子 D 的多项式. 一阶常系数线性方程组 (2.1) 是方程组 (3.5) 的特殊情形.

对方程组 (3.5), 也可以用消去法求解. 如果想要消去 x_1 以外的未知函数, 只须用算子行列式

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} a_{11}(D) & \cdots & a_{1n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(D) & \cdots & a_{nn}(D) \end{vmatrix}$$

的第一列元素的代数余子式 $A_{11}(D), \cdots, A_{n1}(D)$ 依次左乘 (3.5) 中诸式, 然后相加, 可得

$$\begin{aligned} & A_{11}(D)(a_{11}(D)x_1 + \cdots + a_{1n}(D)x_n) + \cdots + \\ & A_{n1}(D)(a_{n1}(D)x_1 + \cdots + a_{nn}(D)x_n) \\ = \; & (a_{11}(D)A_{11}(D) + \cdots + a_{n1}(D)A_{n1}(D))x_1 + \cdots + \\ & (a_{1n}(D)A_{11}(D) + \cdots + a_{nn}(D)A_{n1}(D))x_n \\ = \; & A_{11}(D)f_1(t) + \cdots + A_{n1}(D)f_n(t). \end{aligned}$$

由行列式的性质 (以算子 D 的多项式为元素的行列式同样具有这些性质) 知, 上式左端等于 $\Delta(D)x_1$, 即

$$\Delta(D)x_1 = A_{11}(D)f_1(t) + \cdots + A_{n1}(D)f_n(t).$$

如果想要消去 x_i 以外的未知函数, 则用行列式 $\Delta(D)$ 的第 i 列元素的代数余子式 $A_{1i}(D)$, $\cdots$, $A_{ni}(D)$ 依次左乘 (3.5) 中诸式, 然后相加得到

$$\Delta(D)x_i = A_{1i}(D)f_1(t) + \cdots + A_{ni}(D)f_n(t), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{3.6}$$

以上的做法与解线性代数方程组的克莱姆 (Cramer, 1704-1752) 法则完全相同.

(3.6) 是一个关于 $x_i, i=1,\cdots,n$ 的高阶非齐次线性方程，我们可以用前面介绍的算子解法来求解.

习 题

1. 求下列方程的实通解：

(1) $(D^2+1)x=t^2+2$;

(2) $(D^3-4D^2+3D)x=6t-2$;

(3) $(D^3-5D^2+8D-4)x=e^{2t}+2e^t+3e^{-t}$;

(4) $(D^7-2D^5+D^3)x=1+4e^t$;

(5) $(D^4+4)x=t^2+\cos 2t$;

(6) $(D^2+4)x=\cos 2t+\cos 4t$;

(7) $(D^3-3D^2+4)x=te^{2t}$;

(8) $(D^2-1)x=2t\sin t$;

(9) $(D^2-4D+5)x=4te^{2t}\cos t$;

(10) $(D^2-4D+4)x=\frac{e^{2t}}{t^2}$;

(11) $(D^2-3D+2)x=\sin e^{-t}$;

(12) $(D^2-1)x=\frac{1}{1+e^{-t}}$.

2. 求下列欧拉方程的实通解：

(1) $t^2x''-5tx'+9x=t^3$;

(2) $t^2x''-tx'+x=1+t$;

(3) $t^2x''-2tx'+2x=t^3$;

(4) $t^3x'''-2tx'=1$;

(5) $t^3x'''+tx'-x=3t^4$;

(6) $t^4x''''+2t^3x'''+t^2x''-tx'+x=1$.

3. 求 $\frac{1}{(D-\lambda)^m}f(t)$, 其中 λ 是常数， m 是自然数， $f(t)$ 是连续函数.

4. 求积分

$$I=\int t^n e^{-\lambda t}\mathrm{d}t,$$

其中 n 是非负整数， λ 是非零常数.

5. 求方程

$$(D+1)(D+\sqrt{3})x=\sin t$$

的 2π- 周期解.

6. 求下列方程的实通解：

(1) $x'=x+2y,\ y'=x-5\sin t$;

(2) $x'=2x-3y+2e^t,\ y'=x-2y+t$;

(3) $x' = x - 2y + \cos t,\ y' = x - y - \sin t;$

(4) $x' = z,\ y' = x + z + t,\ z' = -2x + y + z + t + e^{2t}.$

7. 设方程组 (3.5) 是周期为 ω 的. 则它有 ω- 周期解，当且仅当它有于 $\mathbb{R}^1$ 有界的解.

8. 在 (3.5) 中，若 $\Delta(\lambda) = 0$ 的特征根都有非零实部，并且 (3.5) 是周期为 ω 的，则 (3.5) 有唯一的 ω- 周期解.

3.2　拉氏变换法 *

设函数 $f(t)$ 于 $t \geq 0$ 上连续，且有正数 M 和 a 使得

$$|f(t)| \leq Me^{at},\quad t \geq 0. \tag{3.7}$$

则含复参数 s 的无穷积分

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

当 $\mathrm{Re}\ s > a$ 时就有意义，它是把函数 $f(t)$ 变为函数 $F(s)$ 的变换，称为 $f(t)$ 的 **拉普拉斯**(Laplace, 1749-1827) **变换**, 简称 **拉氏变换**, 记为 $\mathcal{L}\{f(t)\}$. $f(t)$ 称为 **原函数**, $F(s)$ 或 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ 称为 **像函数**.

我们引进拉氏变换的目的，主要用于直接计算初值问题的解. 如果把未知函数的初值视为任意常数，其实也就得到了通解. 从定义出发，直接可算出一些特殊的函数的拉氏变换，例如

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{1}{s},\\ \mathcal{L}\{e^{2t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-(s-2)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{s-2}.\end{aligned}$$

我们摘录部分函数的拉氏变换列成下表，表中 n 是自然数， b 是正数， a 和 ω 是任意常数.

拉氏变换简表

	原函数	像函数		原函数	像函数
1	1	$\frac{1}{s}$	11	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	12	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	13	$\sin\omega t - \omega t\cos\omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
4	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	14	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
5	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	15	$f(t-b)$	$e^{-bs}F(s)$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	16	$f(bt)$	$\frac{1}{b}F(\frac{s}{b})$
7	$\mathrm{ch}\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	17	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
8	$\mathrm{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	18	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(t)\mathrm{d}t$
9	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	19	$\int_0^t f(s)\mathrm{d}s$	$\frac{F(s)}{s}$
10	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	20	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F(s)G(s)$

下面举例说明如何利用这个表来计算函数的拉氏变换.

例 3.7 计算 $\mathcal{L}\{\sin\omega t\}, \mathcal{L}\{t^2\sin\omega t\}$ 和 $\mathcal{L}\{t^2e^{at}\sin\omega t\}$.

解 由表中的 6 直接得到

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

后两个函数的拉氏变换虽然表中没有，但由表中的 17, 我们有

$$\mathcal{L}\{t^2\sin\omega t\} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{6\omega s^2-2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^3}.$$

再用表中的 14, 进而有

$$\mathcal{L}\{t^2e^{at}\sin\omega t\} = \mathcal{L}\{t^2\sin\omega t\}|_{s\to s-a} = \frac{6\omega(s-a)^2-2\omega^3}{((s-a)^2+\omega^2))^3}.$$

□

由于原函数 $f(t)$ 及其拉氏变换 $F(s)$ 是一一对应的 (应用复变函数理论可以证明), 因此可以从 $F(s)$ 求出唯一的 $f(t)$. 这定义了一个从 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的变换，称为 **拉普拉斯反演变换**, 简称 **拉氏反变换**. $F(s)$ 的拉氏反变换记为 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. 上述拉氏变换简表实际上也是拉氏反变换的简表，可以从 $F(s)$ 查出 $f(t)$, 即 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. 注意拉氏变换和拉氏反变换都是线性变换，即对任意常数 c_1, c_2, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1f_1+c_2f_2\} &= c_1\mathcal{L}\{f_1\}+c_2\mathcal{L}\{f_2\},\\ \mathcal{L}^{-1}\{c_1f_1+c_2f_2\} &= c_1\mathcal{L}^{-1}\{f_1\}+c_2\mathcal{L}^{-1}\{f_2\}.\end{aligned}$$

下面说明如何利用拉氏变换解方程 (3.1). 首先注意对于在 $t\ge 0$ 上连续可微且满足 (3.7) 的函数 $g(t)$, 经分部积分，有

$$s\int_0^\infty e^{-st}g(t)\mathrm{d}t = g(0)+\int_0^\infty e^{-st}g'(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\}-g(0).$$

反复利用这一公式，可得

$$\mathcal{L}\{g^{(k)}(t)\} = s^k\mathcal{L}\{g(t)\}-s^{k-1}g(0)-s^{k-2}g'(0)-\cdots-g^{(k-1)}(0),\quad k=1,2,\cdots, \tag{3.8}$$

其中 $g(t)$ 是 k 次连续可微函数，它本身及其直到 k 阶微商都满足 (3.7).

现在设 $f(t)$ 于 $t\ge 0$ 上连续且满足 (3.7). 由常数变易公式不难看出：方程 (3.1) 的解 $x(t)$ 及其直到 n 阶的微商都满足 (3.7). 对方程 (3.1) 两端取拉氏变换：

$$\mathcal{L}\{P(D)x(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

利用公式 (3.8) 计算 $\mathcal{L}\{P(D)x(t)\}$, 经整理便得

$$\begin{aligned}P(s)\mathcal{L}\{x(t)\}-(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1})x(0)&\\ -(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-2})x'(0)&\\ -\cdots-(s+a_1)x^{(n-2)}(0)-x^{(n-1)}(0) &= \mathcal{L}\{f(t)\}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

由此解出 $\mathcal{L}\{x(t)\}$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{P(s)}\Big(&(s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1})x(0)\\ &+(s^{n-2}+a_1s^{n-3}+\cdots+a_{n-2})x'(0)\\ &+\cdots+(s+a_1)x^{(n-2)}(0)+x^{(n-1)}(0)+\mathcal{L}\{f(t)\}\Big).\end{aligned}\tag{3.10}$$

最后两边取拉氏反变换去确定 $x(t)$. 为求方程 (3.1) 满足初值条件

$$x(0)=\xi_0,\ x'(0)=\xi_1,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(0)=\xi_{n-1}$$

的解，只须将这些初值代入 (3.10), 然后取拉氏反变换. 如果要求的是方程具零初值的解，则 (3.10) 变得很简单：

$$\mathcal{L}\{x(t)\}=\frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{P(s)}. \tag{3.11}$$

例 3.8 解初值问题

$$x''+m^2x=\sin\omega t,\quad x(0)=\xi_0,\quad x'(0)=\xi_1,$$

其中 $m^2,\omega^2>0$.

解 对方程两边取拉氏变换，由公式 (3.9)(其中取 $n=2,a_1=0,a_2=m^2,x(0)=\xi_0,x'(0)=\xi_1$), 我们有

$$(s^2+m^2)\mathcal{L}\{x\}-\xi_0s-\xi_1=\mathcal{L}\{\sin\omega t\}.$$

其实对简单的方程可直接计算，而不必去套用形式复杂的公式 (3.9). 由此得到

$$\mathcal{L}\{x\}=\frac{(\xi_0s+\xi_1)+\mathcal{L}\{\sin\omega t\}}{s^2+m^2}.$$

由表中的 6 知

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

故

$$\mathcal{L}\{x\}=\frac{\xi_0s}{s^2+m^2}+\frac{\xi_1}{s^2+m^2}+\frac{\omega}{(s^2+m^2)(s^2+\omega^2)}.$$

现在对上式两边求拉氏反变换，利用表中的 6,13, 得

$$x=\begin{cases}\xi_0\cos mt+\frac{\xi_1}{m}\sin mt+\frac{1}{2\omega^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t), & m=\omega,\\ \xi_0\cos mt+\frac{\xi_1}{m}\sin mt+\frac{\omega}{\omega^2-m^2}(m^{-1}\sin mt-\omega^{-1}\sin\omega t), & m\neq\omega.\end{cases}$$

这就是所论初值问题的解，视 ξ_0,ξ_1 为任意常数，它也就是所论方程的通解. □

例 3.9 解初值问题

$$x^{(7)}-4x^{(6)}+8x^{(5)}-8x^{(4)}+4x^{(3)}=t^2,$$
$$x(0)=0,\ x'(0)=0,\cdots,x^{(6)}(0)=0.$$

解 对方程两边取拉氏变换，由于所要求的是具零初值的解，故可直接利用公式 (3.11) 而得到

$$\mathcal{L}\{x\}=\frac{\mathcal{L}\{t^2\}}{s^7-4s^6+8s^5-8s^4+4s^3}.$$

由表中的 2 知

$$\mathcal{L}\{t^2\}=\frac{2}{s^3}.$$

故

$$\mathcal{L}\{x\}=\frac{2}{s^6(s^4-4s^3+8s^2-8s+4)}.$$

将上式右端的有理分式加以分解，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x\} &= \frac{1}{2s^6}+\frac{1}{s^5}+\frac{1}{s^4}+\frac{1}{2s^3}-\frac{1}{8s^2}-\frac{1}{2s}\\ &\quad -\frac{3}{8}\frac{1}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1}+\frac{1}{4}\frac{s-1}{((s-1)^2+1)^2}.\end{aligned}$$

取拉氏反变换，利用表中的 2, 1, 14 与 6, 14 与 5, 14 与 12, 最后得到

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2!}-\frac{t}{8}-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{8}\sin t+\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{8}t\sin t\right)e^t,$$

它就是上述初值问题的解. □

拉氏变换法同样可用于常系数线性微分方程组. 以方程组 (3.4) 为例. 为了求解，在每个方程两端同取拉氏变换，得

$$\begin{cases}\mathcal{L}\{x'\}=2\mathcal{L}\{x\}+\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{e^{2t}\}+3\mathcal{L}\{t\}-\mathcal{L}\{1\},\\ \mathcal{L}\{y'\}=\mathcal{L}\{x\}+2\mathcal{L}\{y\}+2\mathcal{L}\{e^{2t}\}+9\mathcal{L}\{t\}-6\mathcal{L}\{1\}.\end{cases}$$

利用公式 (3.8) 和拉氏变换表中的 14, 1, 2, 以及初值条件

$$x(0)=x_0,\quad y(0)=y_0,$$

进行计算，经整理后得到

$$\begin{cases}(s-2)\mathcal{L}\{x\}-\mathcal{L}\{y\}=\frac{1}{s-2}+\frac{3}{s^2}-\frac{1}{s}+x_0,\\ -\mathcal{L}\{x\}+(s-2)\mathcal{L}\{y\}=\frac{2}{s-2}+\frac{9}{s^2}-\frac{6}{s}+y_0.\end{cases}$$

由此将 $\mathcal{L}\{x\},\mathcal{L}\{y\}$ 解出：

$$\begin{cases}\mathcal{L}\{x\}=\left(\frac{x_0+y_0}{2}+1\right)\frac{1}{s-3}+\frac{x_0-y_0}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{2}{s-2}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s},\\ \mathcal{L}\{y\}=\left(\frac{x_0+y_0}{2}+1\right)\frac{1}{s-3}-\frac{x_0-y_0}{2}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}-\frac{5}{s^2}.\end{cases}$$

取拉氏反变换便得

$$\begin{cases}x=\left(\frac{x_0+y_0}{2}+1\right)e^{3t}+\frac{x_0-y_0}{2}e^t-2e^{2t}+t+1,\\ y=\left(\frac{x_0+y_0}{2}+1\right)e^{3t}-\frac{x_0-y_0}{2}e^t-e^{2t}-5t.\end{cases}$$

如果把 x_0,y_0 看成任意常数，则它是方程组 (3.4) 的通解.

拉氏变换法原则上也适用于一般常系数线性微分方程组 (3.5), 步骤同上. 首先对 (3.5) 两端取拉氏变换并利用公式 (3.8), 于是得到一个关于 $\mathcal{L}\{x_i\}, i=1,\cdots,n$ 的联立方程组. 由此解出 $\mathcal{L}\{x_i\}, i=1,\cdots,n$, 然后取拉氏反变换.

习 题

1. 用拉氏变换解下列初值问题：

(1) $x''-2x'+x=0,\quad x(0)=\alpha,\quad x'(0)=\beta$;

(2) $x''-2x'+x=e^t,\quad x(0)=\alpha,\quad x'(0)=\beta$;

(3) $x''+4x=\cos 2t,\quad x(0)=\alpha,\quad x'(0)=\beta$;

(4) $x''' - 3x'' + 4x = te^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

2. 考虑非线性受迫振动方程：

$$x'' + m^2 x = \sin \omega t,$$

其中 $\sin \omega t$ 是周期的作用外力， $m^2, \omega^2 > 0$. 证明：当 $m^2 \neq \omega^2$ 时，此方程存在 ω- 周期解；否则，方程无 ω- 周期解，并且方程的所有解都无界.