# §1　引言

微分方程理论的主要问题是求解和研究解的各种性质. 这些问题对于第一章中那些能用初等积分法求得通解的简单方程和第三章中那些能用代数方法求得通解的常系数线性方程，都很容易或者至少比较容易解决. 第二章所研究的一般线性方程，虽然它的通解一般无法具体求出，但从理论上我们知道，通解具有简单而清晰的结构. 这一重要事实对于求解和研究解的各种性质无疑是很方便的.

然而，对于一般的非线性方程，问题就困难多了. 前已指出，即使像黎卡提方程 $x' = x^2 - t$ 那样看上去十分简单的非线性方程，也不能用初等积分法求解. 在这一章里，我们介绍关于非线性方程的一般理论. 这些理论无论对于求解或是进一步研究解的各种性质都是很基本的.

我们将着重研究一阶正规形非线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(t, x_1, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(t, x_1, \cdots, x_n), \end{cases} \tag{E}$$

其中 $f_i, i = 1, \cdots, n$ 是 $t, x_1, \cdots, x_n$ 的已知函数. 因为如我们在第一章 §1 所指出，任意正规形高阶方程

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \tag{E}_n$$

都可以化成等价的一阶正规形方程组，关于方程组 $(E)$ 的所有定理都可转到高阶方程 $(E)_n$ 上去.

方程组 $(E)$ 也可简记为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \tag{E}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \cdots, x_n) \end{pmatrix}.$$

关于方程组 $(E)$ 的最基本的定解问题是初值问题，也称为柯西问题. 设初值条件为

$$x(\tau) = \xi, \tag{1.1}$$

其中 $\xi$ 是任一给定的 $n$ 维列向量.

本章先研究初值问题解的存在性与唯一性，然后研究解的其它基本性质.