§2 皮卡存在与唯一性定理

2.1 皮卡定理

在第二章里，我们曾用逐次逼近法对线性方程证明过初值问题解的存在与唯一性. 这种方法也可以用于非线性方程组 (E), 但需要求 $f(t,x)$ 除连续外还要满足某种条件, 其中常用的一种是 **李普希茨** (Lipschitz, 1832-1903) **条件**, 简称李氏条件. 我们说 $f(t,x)$ 在闭域

$$R:\quad |t-\tau|\le a,\quad |x-\xi|\le b$$

上满足 **李氏条件**, 如果存在常数 N, 使得对任意点 $(t,x_1),(t,x_2)\in R$, 都有

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le N|x_1-x_2|, \tag{2.1}$$

其中 N 称为 **李氏常数**. 由中值定理知，如果 $f(t,x)$ 在 R 上关于 x 的各个分量的偏微商都存在且有界，则 $f(t,x)$ 在 R 上满足李氏条件.

定理 2.1 (**皮卡定理**) *若 $f(t,x)$ 在闭域 R 上连续，且满足李氏条件 (2.1), 则方程组 (E) 于区间 $I_0:|t-\tau|\le h$ 上有唯一解满足初值条件 (1.1), 其中 $h=\min\{a,\frac{b}{M}\}$, M 是 $|f(t,x)|$ 于 R 上的一个上界.*

证明 分 3 步来完成.

1. 将问题归结为证明等价的积分方程组

$$x(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,x(s))\mathrm{d}s \tag{2.2}$$

于 I_0 上有唯一连续解. 等价的意思是，如果 $\varphi(t)$ 是初值问题 (E), (1.1) 于 I_0 上的解，则 $\varphi(t)$ 必是方程组 (2.2) 于 I_0 上的解 (当然连续); 反之，如果 $\varphi(t)$ 是方程组 (2.2) 于 I_0 上的连续解，则 $\varphi(t)$ 必是初值问题 (E), (1.1) 于 I_0 上的解.

2. 在 I_0 上，构造皮卡迭代序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 并证明其收敛性. 为此，令

$$\begin{aligned}&\varphi_0(t)=\xi,\\&\varphi_k(t)=\xi+\textstyle\int_\tau^t f(s,\varphi_{k-1}(s))\mathrm{d}s,\quad k=1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{2.3}$$

用归纳法容易证明： $\{\varphi_k(t)\}$ 在 I_0 上有定义，连续，且满足不等式

$$|\varphi_k(t)-\xi|\le Mh\le b,\quad t\in I_0. \tag{2.4}$$

事实上，当 $k=0$ 时 (2.4) 显然成立. 假设 $\varphi_{m-1}(t)$ 在 I_0 上有定义，连续且 (2.4) 当 $k=m-1$ 时成立. 则当 $t\in I_0$ 时， $(t,\varphi_{m-1}(t))\in R$, 所以 $f(t,\varphi_{m-1}(t))$ 于 I_0

上有定义，并且 $|f(t,\varphi_{m-1}(t))| \le M$. 因此由 $k=m$ 时的 (2.3) 知， $\varphi_m(t)$ 是于 I_0 上有定义的连续函数，且 $|\varphi_m(t)-\xi| \le Mh \le b$.

在 $f(t,x)$ 于 R 上满足李氏条件的假设下，利用归纳法容易证明：

$$|\varphi_k(t)-\varphi_{k-1}(t)| \le MN^{k-1}\frac{|t-\tau|^k}{k!}, \quad t\in I_0,\ k=1,2,\cdots. \tag{2.5}$$

事实上，由 (2.3) 知，当 $t\in I_0$ 时，

$$|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)| = \left|\int_\tau^t f(s,\varphi_0(s))\mathrm{d}s\right| \le M|t-\tau|,$$

即当 $k=1$ 时 (2.5) 成立．假设当 $k=m$ 时 (2.5) 成立．则利用 (2.3) 和李氏条件 (2.1) 可推出

$$\begin{aligned}
|\varphi_{m+1}(t)-\varphi_m(t)| &= \left|\int_\tau^t f(s,\varphi_m(s))-f(s,\varphi_{m-1}(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\le N\left|\int_\tau^t |\varphi_m(s)-\varphi_{m-1}(s)|\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \frac{NMN^{m-1}}{m!}\left|\int_\tau^t |s-\tau|^m\mathrm{d}s\right| \\
&\le \frac{MN^m|t-\tau|^{m+1}}{(m+1)!}.
\end{aligned}$$

可见 (2.5) 普遍成立．因此，序列 $\{\varphi_k(t)\}$ 于 I_0 上一致收敛．设其极限函数为 $\varphi(t)$. 则 $\varphi(t)$ 是积分方程组 (2.2), 从而是初值问题 (E), (1.1) 于 I_0 上的解.

3. 最后证明唯一性．假设 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 都是方程组 (E) 在区间 I_0 上的解，满足同一初值条件 (1.1). 于是在 I_0 上有

$$\varphi(t) \equiv \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s,$$
$$\psi(t) \equiv \xi + \int_\tau^t f(s,\psi(s))\mathrm{d}s.$$

记 $u(t)=|\varphi(t)-\psi(t)|$. 则由上两式得

$$u(t) \le N\left|\int_\tau^t u(s)\mathrm{d}s\right|. \tag{2.6}$$

以 M_0 表示 $u(t)$ 于 I_0 上的一个上界．则由 (2.6) 有

$$u(t) \le M_0N|t-\tau| \le M_0Nh.$$

把它代入 (2.6) 右端，进而有

$$u(t) \le M_0 N^2 \frac{|t-\tau|^2}{2!} \le M_0 N^2 \frac{h^2}{2!}.$$

反复把估算出来的结果代入 (2.6) 右端，可得到

$$u(t) \le M_0 N^k \frac{|t-\tau|^k}{k!} \le M_0 N^k \frac{h^k}{k!},$$

其中 k 是任意的自然数. 令 $k \to \infty$ 就知必有 $u(t) \equiv 0$, 即 $\varphi(t) = \psi(t)$. 定理证完. □

如果对任意点 $(\tau,\xi) \in G$, 恒有含于 G 的闭域 $R: |t-\tau| \le a, |x-\xi| \le b$, 使得在其上 $f(t,x)$ 满足李氏条件 (对 G 中不同的点 (τ,ξ), 常数 a, b 和李氏常数 N 可能不同), 则称 $f(t,x)$ 于域 G 上**局部地满足李氏条件**. 特别，如果 $f(t,x)$ 在 G 上关于 x 的各个分量的偏微商均存在且连续，则 $f(t,x)$ 于 G 上局部地满足李氏条件.

推论 2.1 *若 $f(t,x)$ 在 (t,x) 空间的域 G 内连续，且局部地满足李氏条件，则对于 G 内每一点 (τ,ξ), 方程组 (E) 在含 τ 的某一区间 (一般与 (τ,ξ) 有关) 上有唯一满足初值条件 (1.1) 的解.*

习 题

1. 设 $f(t,x)$ 于 $[0,1] \times \mathbb{R}^1$ 上连续，并且关于 x 严格递减. 则 (E) 满足初值条件 $x(0) = 0$ 的解在区间 $[0,1]$ 上唯一.

2. 设 $f(t,x)$ 于 $[0,1] \times \mathbb{R}^1$ 上连续， $f(t,x) \neq 0$, 并且关于 t 满足李氏条件. 则对任意的 $(\tau,\xi) \in [0,1] \times \mathbb{R}^1$, (E) 满足初值条件 $x(\tau) = \xi$ 的解存在且唯一.

2.2 唯一性条件的推广 *

定理 2.1 中的唯一性部分也可以这样来证明：令 $r(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|$, 这里 $\|x\|$ 表示向量 x 的欧氏范数，即 $\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $x_1, \cdots, x_n$ 为向量 x 的分量. 要证明的是 $r(t) \equiv 0$, $t \in I_0$. 用反证法. 假如要证明的结论不成立，则有 $t_1 \in I_0$, 使得 $r(t_1) > 0$. 因为 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 都满足初值条件 (1.1), 故 $t_1 \neq \tau$. 为确定计，设 $t_1 > \tau$. 以 S 表示 $\tau \le t \le t_1$ 上所有使 $r(t) = 0$ 的 t 值集合. 因为至少 $\tau \in S$, 故 S 不空，设其上确界为 t_0. 由 $r(t)$ 的连续性知必有 $r(t_0) = 0$. 又由于 t_0 是 S 的上确界，而 $r(t_1) > 0$, 故 $r(t) > 0$, $t \in (t_0, t_1)$. 在 (t_0, t_1) 上计算 $\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{r(t)} \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(t) - \psi_i(t))(f_i(t,\varphi(t)) - f_i(t,\psi(t))) \\ &\le |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))| \le N|\varphi(t) - \psi(t)|.\end{aligned}$$

利用不等式

$$|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\, \|x\|,$$

便得到

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \leq N\sqrt{n}r(t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

从 $t \in (t_0, t_1)$ 到 t_1 积分上式就有

$$\int_{r(t)}^{r(t_1)} \frac{\mathrm{d}r}{r} \leq N\sqrt{n}(t_1 - t),$$

即

$$\ln r(t_1) - \ln r(t) \leq N\sqrt{n}(t_1 - t), \quad t \in (t_0, t_1).$$

当 $t \to t_0$ 时左端趋于 $+\infty$, 而右端为有限数．这一矛盾表明，在 I_0 上应有 $r(t) \equiv 0$, 即 $\varphi(t) \equiv \psi(t)$.

上述证明的要害是 $\int_0^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{r} = +\infty (r_0 > 0)$. 抓住了这一要害，我们就不难理解如下的 **奥斯古德** (Osgood, 1864-1943) **条件**: 对任意 $(t, x_1), (t, x_2) \in R$, 有

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq G(\|x_1 - x_2\|), \tag{2.7}$$

其中 $G(s)$ 在 $0 < s \leq s_0 (s_0 > 0)$ 上连续， $G(s) > 0$, 且

$$\int_0^{s_0} \frac{\mathrm{d}s}{G(s)} = +\infty. \tag{2.8}$$

定理 2.2 **(奥斯古德)** *若 $f(t, x)$ 在 $R: |t - \tau| \leq a, |x - \xi| \leq b$ 上连续且满足奥斯古德条件，则方程组 (E) 只能有一个解满足初值条件 (1.1).*

证明 完全同上面一样，用反证法．首先有

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \leq |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))|.$$

于是由 (2.7) 得到

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \leq G(\|\varphi(t) - \psi(t)\|) = G(r(t)).$$

从 $t \in (t_0, t_1)(t_0, t_1$ 的意义同上) 到 t_1 积分上式得到

$$\int_{r(t)}^{r(t_1)} \frac{\mathrm{d}s}{G(s)} \leq t_1 - t, \quad t \in (t_0, t_1).$$

令 $t \to t_0$, 利用 (2.8) 就知，左端趋于 $+\infty$, 而右端为有限．矛盾．定理证完． □

注 2.1 *从皮卡定理的证明我们看到，李氏条件在保证初值问题解的唯一性的同时，还保证皮卡逐步逼近序列的收敛性．容易想到下面的问题：足以保证初值问题解的唯一性的条件是否都能保证皮卡逐步逼近序列的收敛性？有例子表明，对这个问题的一般提法回答是否定的．于是人们进一步问：较李氏条件更为一般的各种特定的唯一性条件是否具有这种性能？关于这个问题的研究已经有了很一般的结果．特别，已经证明了上述奥斯古德条件具有这种性能．*

习 题

1. 设

$$f(t, x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \ln |x|, & x \neq 0. \end{cases}$$

证明：方程 $x' = f(t, x)$ 不满足李氏条件，但满足奥斯古德条件，因此该方程满足初值条件 $x(0) = 0$ 的解唯一.

2. 在上题中，如果 $f(t,x)$ 换成

$$f(t,x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x(\ln|x|)^{\alpha}, & x\neq 0,\end{cases}$$

其中常数 $\alpha>1$, 结论如何？

2.3 解的整体唯一性

定理 2.3 *如果对域 G 中任一 (τ,ξ), 初值问题 (E), (1.1) 的解在含 τ 的某区间上是唯一的，则对 G 中任一 (τ,ξ), 初值问题 (E), (1.1) 的任意两个解，在其共同的存在区间上必恒等.*

根据这一定理，凡能保证 (E) 的局部解唯一的任何条件，同时也能保证 (E) 的整体解唯一.

证明 设 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 都是初值问题 (E), (1.1) 的解，其共同的存在区间为 $I, \tau\in I$. 为证当 $t\in I$ 时， $\varphi(t)\equiv\psi(t)$, 我们用反证法. 假设存在 $t_1\in I$, 使得 $\varphi(t_1)\neq\psi(t_1)$. 为确定计，设 $t_1>\tau$. 于是必存在 $t_0\geq\tau$, 使得

$$\varphi(t_0)=\psi(t_0),\ \varphi(t)\neq\psi(t),\quad t_0<t\leq t_1. \tag{2.9}$$

在 $t_0\leq t\leq t_1$ 上， $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 都是 (E) 的解，并且满足同一初值条件 $x(t_0)=\varphi(t_0)=\psi(t_0)$. 根据假设，在 $t_0\leq t\leq t_1$ 上就应有 $\varphi(t)\equiv\psi(t)$, 但这与 (2.9) 矛盾. □

2.4 不唯一的情形，奇解

上面我们证明了，如果 $f(t,x)$ 在 (t,x) 空间的域 G 内连续，并且还局部地满足李氏条件或其它更一般的条件，则对任何 $(\tau,\xi)\in G$, 初值问题 (E), (1.1) 的解不仅 (局部地) 存在，而且是唯一的. 假如 $f(t,x)$ 只是连续，下一节将证明，这时初值问题的解依然存在. 然而仅仅要求 $f(t,x)$ 连续，不足以保证初值问题解的唯一性. 例如初值问题

$$x'=2|x|^{\frac{1}{2}},\quad x(0)=0$$

就有无穷多个解. 事实上，容易验证，对任何常数 $a\leq 0,\ b\geq 0$, 函数

$$x=\begin{cases}-(t-a)^2, & -\infty<t<a,\\ 0, & a\leq t\leq b,\\ (t-b)^2, & b<t<+\infty\end{cases}$$

都是上述初值问题的解.

方程组 (E) 的解在空间 (t,x) 的图象，习惯上称为方程 (E) 的 **积分曲线** 或称为 **解曲线**. 运用这个术语，初值问题 (E), (1.1) 的解唯一，就是只有一条积分曲线经过点 (τ,ξ). 上述例子中的初值问题有无穷多个解. 从几何上看，就是有无穷多条积分曲线经过点 $(0,0)$, 所有这些积分曲线都在点 $(0,0)$ 处相切.

这种解不唯一的现象还有更加复杂的情形，它发生在隐方程身上. 回顾第一章 §4 例 4.1, 改变记号可写成

$$x'=e^{\frac{t}{x}x'}, \tag{2.10}$$

它有含任意常数 c 的一族解 (通解)

$$x=\frac{1}{c}e^{ct} \tag{2.11}$$

和另外一个并不包含在这一族解中的特解

$$x=et. \tag{2.12}$$

积分曲线 (2.12) 是一条斜率为 e 的直线．对它上面任何一点 $(t_0,x_0)\neq(0,0)$, 总可在积分曲线族 (2.11) 中找到经过点 (t_0,x_0) 的一条，这只须取 c, 使得 $\frac{1}{c}e^{ct_0}=et_0$, 即 $e^{ct_0}=ect_0$. 易见 $e^{ct_0}=ect_0$ 当且仅当 $ct_0=1$, 从而 $e^{ct_0}=e$. 这说明经过点 $(t_0,x_0)\neq(0,0)$ 的这两条积分曲线在此点具有相同的斜率；换句话说， (2.12) 是方程 (2.10) 的这样一条积分曲线，其上任何一点 $(t_0,x_0)\neq(0,0)$ 都有方程 (2.10) 的另外一条积曲线经过并与之在此点相切.

下面就一般的一阶隐方程式

$$F(t,x,x')=0 \tag{2.13}$$

来阐述这种现象．设 $x=\varphi(t)$ 是方程 (2.13) 在区间 I 上的解．如果它相应的积分曲线上任何一点都有方程 (2.13) 的另一条积分曲线经过并在此点与之相切，则称为方程 (2.13) 在区间 I 上的 **奇解**.

如果 $F(t,x,p)$ 是 (t,x,p) 的连续可微函数，则 $x=\varphi(t)$ 是方程 (2.13) 在区间 I 上的奇解的必要条件是

$$F(t,\varphi(t),\varphi'(t))=0,\quad F_p(t,\varphi(t),\varphi'(t))=0,\quad t\in I. \tag{2.14}$$

事实上， $x=\varphi(t)$ 满足 (2.14) 的第一式是因为它是方程 (2.13) 的解．假如 (2.14) 的第二式在 $t_0\in I$ 处不满足，即 $F_p(t_0,\varphi(t_0),\varphi'(t_0))\neq 0$, 则在点 $(t_0,\varphi(t_0),\varphi'(t_0))$ 附近应用隐函数存在定理，可从 (2.13) 中解出

$$x'=f(t,x), \tag{2.15}$$

且函数 $f(t,x)$ 还是连续可微的．根据唯一性定理，经过点 $(t_0,\varphi(t_0))$, 不可能有方程 (2.13), 即方程 (2.15) 的两条不同的积分曲线．因此 (2.14) 的第二式必对所有 $t\in I$ 成立.

必要条件 (2.14) 表明，方程 (2.13) 的奇解包含在由方程组

$$F(t,x,p)=0,\quad F_p(t,x,p)=0 \tag{2.16}$$

消去 p 而得到的曲线中．这一曲线称为方程 (2.13) 的 p- **判别曲线**. p- 判别曲线是不是奇解，尚需验证.

回到上述例子，方程 (2.10) 的 p- 判别曲线由

$$p=e^{\frac{t}{x}p},\quad 1=\frac{t}{x}e^{\frac{t}{x}p}$$

确定，容易看出，它就是 (2.12).

例 2.1 **克莱罗**(Clairaut, 1713-1765)**方程**

$$x=tx'+g(x') \tag{2.17}$$

恒有奇解，这里函数 $g(p)$ 两次连续可微，且 $g''(p)\neq 0$.

证明 这时的 (2.16) 是

$$x = tp + g(p), \quad t + g'(p) = 0. \tag{2.18}$$

由于 $g''(p) \neq 0$, 我们可从 (2.18) 的第二式解出 $p = \psi(t)$. 代入 (2.18) 的第一式得到

$$x = t\psi(t) + g(\psi(t)). \tag{2.19}$$

下面验证 (2.19) 是方程 (2.17) 的奇解. 为此，首先注意，利用第一章 §4 所述方法可求得方程 (2.17) 的通解

$$x = ct + g(c),$$

其中 c 为任意常数. 对任一 t_0, 取 $c = \psi(t_0)$ 而得到

$$x = \psi(t_0)t + g(\psi(t_0)). \tag{2.20}$$

(2.20) 和 (2.19) 这两条方程 (2.17) 的积分曲线都经过点 $(t_0, x(t_0))$. 在 $t = t_0$ 处，(2.20) 的微商为 $\psi(t_0)$, 而 (2.19) 的微商为 $\psi(t_0) + t_0\psi'(t_0) + g'(\psi(t_0))\psi'(t_0)$, 由于 $t_0 + g'(\psi(t_0)) = 0$, 它也等于 $\psi(t_0)$, 故经过点 $(t_0, \psi(t_0))$ 的这两条积分曲线在此点相切. 这就证明了 (2.19) 是方程 (2.17) 的奇解. □

习 题

1. 求下列微分方程的通解和奇解：

1) $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}, a$ 是一常数;

2) $y = xy' + y'^2$.

2. 设 $G(y)$ 于 $[0, 1]$ 连续，满足 $G(0) = 0, G(y) > 0, y \in (0, 1]$. 证明： $y = 0$ 是方程 $y' = G(y)$ 的奇解的充要条件是积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{G(r)}$ 收敛.