§3 皮亚诺存在定理

在 §2 中，我们在 $f(t,x)$ 连续且满足李氏条件的假设下证明了方程组 (E) 的初值问题解的存在与唯一性．如果只假设 $f(t,x)$ 连续，结论如何？下述的皮亚诺 (Peano, 1858-1932) 定理对解的存在性给出了肯定的回答，但只假设 $f(t,x)$ 连续不能保证解的唯一性.

定理 3.1 *设 $f(t,x)$ 于闭域 $R: |t-\tau| \le a, |x-\xi| \le b$ 上连续．则方程组 (E) 在区间 $I_0: |t-\tau| \le h$ 上有解满足初值条件 (1.1)，其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$，$M$ 是 $|f(t,x)|$ 在 R 上的一个上界.*

为了证明这个定理，需要先做一些准备工作.

3.1 欧拉折线

要证明方程组 (E) 有解 $x(t)$ 满足初值条件 (1.1)，从几何上看，就是要证明 (t,x) 空间存在一条经过点 (τ,ξ) 的曲线 $x = x(t)$，满足

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, x(t)). \tag{3.1}$$

定理 3.1 的证明的基本思路就是设法构造一串经过点 (τ,ξ) 的折线去逼近我们要证明它存在的那条积分曲线.

为此，首先将区间 $I^+: \tau \le t \le \tau + h$ 等分成 m 段，每一段长为 $h_m = \frac{h}{m}$. 记

$$\tau_k = \tau + kh_m, \quad k = 0, 1, \cdots, m.$$

依次由

$$\xi_0 = \xi,\ \frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{\tau_{k+1} - \tau_k} = f(\tau_k, \xi_k), \quad k = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{3.2}$$

即由

$$\xi_0 = \xi,\ \xi_{k+1} = \xi_k + h_m f(\tau_k, \xi_k), \quad k = 0, 1, \cdots, m-1$$

确定 $\xi_k, k = 1, \cdots, m$. (3.2) 就是将 (3.1) 中的微商换成差商，或者说将 (3.1) 离散化的结果．于是我们得到 $m+1$ 个点：

$$(\tau_0, \xi_0), (\tau_1, \xi_1), \cdots, (\tau_m, \xi_m).$$

将相邻两点用直线依次连接起来，便得到一条自初始点 (τ,ξ) 向右行的折线，称为右行 **欧拉折线**. 它可解析地表示成

$$\varphi_m^+(t) = \begin{cases} \xi, & t = \tau, \\ \xi_k + f(\tau_k, \xi_k)(t - \tau_k), & t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \\ & k = 0, 1, \cdots, m-1, \end{cases} \tag{3.3}$$

即

$$\varphi_m^+(t)=\begin{cases}\xi+f(\tau,\xi)(t-\tau), & t\in[\tau,\tau_1],\\ \xi+h_m\sum\limits_{k=0}^{l-1}f(\tau_k,\xi_k)+f(\tau_l,\xi_l)(t-\tau_l), & t\in(\tau_l,\tau_{l+1}],\\ & l=1,\cdots,m-1.\end{cases}\tag{3.4}$$

完全类似地将区间 $I^-:\tau-h\le t\le\tau$ 等分成 m 段, 每一段的长度为 $h_m=\frac{h}{m}$. 记

$$\tau_{-k}=\tau-kh_m,\quad k=0,1,\cdots m,$$

并依次由

$$\xi_0=\xi,\quad \frac{\xi_{-k-1}-\xi_{-k}}{\tau_{-k-1}-\tau_{-k}}=f(\tau_{-k},\xi_{-k}),\quad k=0,1,\cdots,m-1,$$

即由

$$\xi_0=\xi,\quad \xi_{-k-1}=\xi_{-k}-h_mf(\tau_{-k},\xi_{-k}),\quad k=0,1,\cdots,m-1$$

确定 $\xi_{-k},k=0,1,\cdots,m$. 我们也得到 $m+1$ 个点:

$$(\tau,\xi),\ (\tau_{-1},\xi_{-1}),\cdots,\ (\tau_{-m},\xi_{-m}).$$

将相邻两点用直线依次连接起来，便得到自初始点 (τ,ξ) 向左行的欧拉折线，它的解析表达式为

$$\varphi_m^-(t)=\begin{cases}\xi, & t=\tau,\\ \xi_{-k}+f(\tau_{-k},\xi_{-k})(t-\tau_{-k}), & t\in[\tau_{-k-1},\tau_{-k}),\\ & k=0,1,\cdots,m-1,\end{cases}\tag{3.5}$$

即

$$\varphi_m^-(t)=\begin{cases}\xi+f(\tau,\xi)(t-\tau), & t\in[\tau_{-1},\tau],\\ \xi-h_m\sum\limits_{k=0}^{l-1}f(\tau_{-k},\xi_{-k})+f(\tau_{-l},\xi_{-l})(t-\tau_{-l}), & t\in[\tau_{-l-1},\tau_{-l}),\\ & l=1,\cdots,m-1.\end{cases}\tag{3.6}$$

将右行和左行欧拉折线连接起来，便得到区间 $I_0:|t-\tau|\le h$ 上的欧拉折线，其表达式为

$$\varphi_m(t)=\begin{cases}\varphi_m^+(t), & t\in[\tau,\tau+h],\\ \varphi_m^-(t), & t\in[\tau-h,\tau).\end{cases}\tag{3.7}$$

函数 $\varphi_m(t)$ 具有下列性质：

1. 当 $t \in I_0$ 时， $(t, \varphi_m(t)) \in R$;
2. 当 $t_1, t_2 \in I_0$ 时， $|\varphi_m(t_1) - \varphi_m(t_2)| \le M|t_1 - t_2|$;
3. 若记

$$\Delta_m(t) = \varphi_m(t) - \left(\xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_m(s))\mathrm{d}s\right), \tag{3.8}$$

即

$$\varphi_m(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_m(s))\mathrm{d}s + \Delta_m(t),$$

则当 $m \to \infty$ 时，在 I_0 上一致地有

$$\Delta_m(t) \to 0.$$

性质 1 和性质 2 容易证明. 下面证明性质 3.

因为 $f(t,x)$ 在 R 上连续，所以对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in R, |t_1 - t_2| \le \delta, |x_1 - x_2| \le \delta$ 时，有

$$|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)| \le \frac{\varepsilon}{h}.$$

由 (3.7), (3.3) 知，当 $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}], k = 0, 1, \cdots, m-1$ 时，有

$$|\varphi_m(t) - \xi_k| = |f(\tau_k, \xi_k)(t - \tau_k)| \le |f(\tau_k, \xi_k)| \cdot |\tau_{k+1} - \tau_k| \le M\frac{h}{m}.$$

故存在自然数 K, 使得当 $m \ge K$ 时有

$$|f(\tau_k, \xi_k) - f(t, \varphi_m(t))| \le \frac{\varepsilon}{h}. \tag{3.9}$$

同样，由 (3.7), (3.5) 知，当 $t \in [\tau_{-k-1}, \tau_{-k}], k = 0, 1, \cdots, m-1$ 时，有

$$|\varphi_m(t) - \xi_{-k}| \le M\frac{h}{m}.$$

从而当 $m \ge K$ 时有

$$|f(\tau_{-k}, \xi_{-k}) - f(t, \varphi_m(t))| \le \frac{\varepsilon}{h}. \tag{3.10}$$

将 (3.4), (3.6), (3.7) 代入 (3.8), 得到

$$\Delta_m(t) = \begin{cases} \int_\tau^t (f(\tau,\xi) - f(s,\varphi_m(s)))\mathrm{d}s, & t \in [\tau, \tau_1], \\ \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (f(\tau_k,\xi_k) - f(s,\varphi_m(s)))\mathrm{d}s & \\ + \int_{\tau_l}^t (f(\tau_l,\xi_l) - f(s,\varphi_m(s)))\mathrm{d}s, & t \in (\tau_l, \tau_{l+1}], \\ & l = 1, 2, \cdots, m-1, \end{cases}$$

$$\Delta_m(t) = \begin{cases} \int_\tau^t (f(\tau,\xi) - f(s,\varphi_m(s)))\mathrm{d}s, & t \in [\tau_{-1}, \tau], \\ \sum_{k=0}^{l-1} \int_{\tau_{-k}}^{\tau_{-k-1}} (f(\tau_{-k},\xi_{-k}) - f(s,\varphi_m(s)))\mathrm{d}s & \\ + \int_{\tau_{-l}}^t (f(\tau_{-l},\xi_{-l}) - f(s,\varphi_m(s)))\mathrm{d}s, & t \in [\tau_{-l-1}, \tau_{-l}), \\ & l = 1, 2, \cdots, m-1. \end{cases}$$

由此利用 (3.9), (3.10) 就可推出：对任何 $t \in I_0$, 有

$$|\Delta_m(t)| < \varepsilon.$$

性质 3 于是得到了证明.

3.2 阿尔采拉 - 阿斯科利引理

以上我们构造了一串经过点 (τ, ξ) 的欧拉折线，得到了一串满足初值条件 (1.1) 的函数 $\varphi_m(t)$. 我们希望从中能抽出一个在 I_0 上一致收敛的子序列，其极限函数就是初值问题 (E), (1.1) 的解. 为此，我们需要利用下面的引理，通常称为 **阿尔采拉**(Arzelà, 1847-1912)- **阿斯科利**(Ascoli, 1843-1896) **引理**, 其意义与证明方法都与数学分析中的聚点原则相似.

设 $F = \{f(t)\}$ 是定义在区间 I 上的函数族. 如果存在正数 M_0, 使得对任意 $f(t) \in F$, 都有

$$|f(t)| \le M_0, \quad t \in I,$$

则称函数族 F 在区间 I 上是 **一致有界** 的；如果对任一正数 ε, 存在仅与 ε 有关的正数 δ, 使得对任意 $f(t) \in F$, 只要 $t_1, t_2 \in I, |t_1 - t_2| \le \delta$, 就有

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon,$$

则称函数族 F 在区间 I 上是 **等度连续** 的.

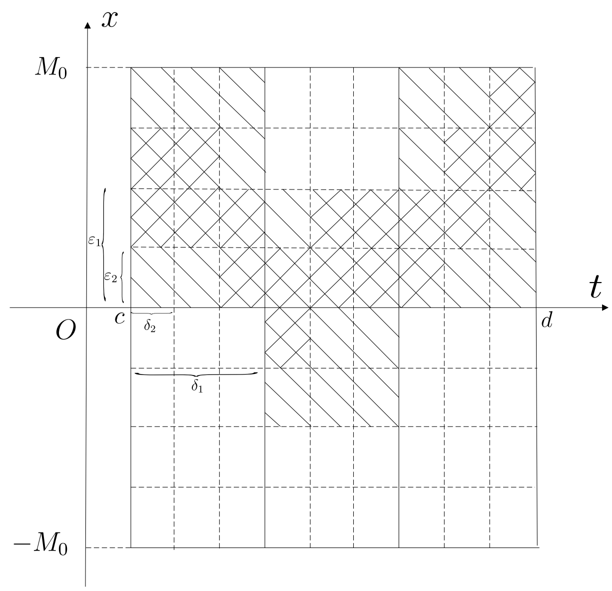
从定义就知，一致有界的函数族中每一函数都是有界的；等度连续的函数族中每一函数都是一致连续的. 但这两个论断的逆不真.

引理 3.1 设 $F=\{f(t)\}$ 是有限区间 $I=[c,d]$ 上一致有界，等度连续的无穷函数族. 则从 F 中定可抽出在区间 I 上一致收敛的子序列.

证明 先考虑 F 是纯量函数族的情形. 根据假设， F 在 I 上一致有界，即存在 $M_0>0$, 使得对任意 $f\in F$, 都有 $|f(t)|\leq M_0, t\in[c,d]$. 所以 F 中函数的图形都在矩形

$$R_0:\quad c\leq t\leq d,\ \ -M_0\leq x\leq M_0$$

之中 (见图).



令 $\varepsilon_1=\frac{M_0}{2}$. 根据 F 的等度连续性，存在自然数 n_1, 使得对任意 $f\in F$, 有

$$|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon_1,\ \ t_1,t_2\in[c,d],\ \ |t_1-t_2|\leq\delta_1=\frac{d-c}{n_1}. \tag{3.11}$$

用平行于坐标轴的直线将 R_0 分割成高为 ε_1 宽为 δ_1 的小矩形. 这样的小矩形共有 $4n_1$ 个. 由 (3.11) 知， F 中每个函数的图形在以相邻二垂线为边界的每一竖条上最多只能经过两个相邻的小矩形. 在 n_1 个这样的竖条中，每一竖条各取两个相邻小矩形构成一个“高”为 $2\varepsilon_1$ 的多边形. 这种多边形的个数显然有限，而 F 中每一函数的图形都包含在某一个这样的多边形内. 按假设， F 中的函数有无穷多个，可见至少有一个“高”为 $2\varepsilon_1$ 的多边形，记为 S_1, 在其内含有 F 的无穷多个函数的图形. 将 F 的这个无穷子集记为 F_1. 令 $\varepsilon_2=\frac{M_0}{2^2}$. 再由 F 的等度连续性知，存在自然数 n_2, 使得对任意 $f\in F$, 有

$$|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon_2,\ \ t_1,t_2\in[c,d],\ \ |t_1-t_2|\leq\delta_2=\frac{d-c}{n_2}.$$

用平行于坐标轴的直线将 R_0 分割成高为 ε_2 宽为 δ_2 的小矩形. 同上可知, 至少有一个含于 S_1 中的 "高" 为 $2\varepsilon_2$ 的多边形 S_2, 在其内含有 F_1 的无穷多个函数的图形. 将 F_1 的这个无穷子集记为 F_2.

一般来说, 假如已作出 "高" 为 $2\varepsilon_k = \frac{M_0}{2^{k-1}}$ 的多边形 S_k, 并得到图形含于其内的无穷函数族 F_k. 对于 $\varepsilon_{k+1} = \frac{M_0}{2^{k+1}}$, 我们还能作出含于 S_k 中的 "高" 为 $2\varepsilon_{k+1}$ 的多边形 S_{k+1}, 在其内含有 F_k 的无穷多个函数的图形. 将 F_k 的这个无穷子集记为 F_{k+1}.

总之, 我们得到一串函数族 $F_1, F_2, \cdots, F_k, \cdots$, 它们具有如下性质:

1. F_k 都是无穷函数族, $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$;

2. 对于 F_k 中的任意两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 有

$$|f_1(t) - f_2(t)| < 2\varepsilon_k = \frac{M_0}{2^{k-1}}, \quad t \in [c, d].$$

现在在 F_1 中取一函数 $f_1(t)$, 在 F_2 中取一异于 $f_1(t)$ 的函数 $f_2(t)$,$\cdots$, 在 F_k 中取一异于 $f_1(t), \cdots, f_{k-1}(t)$ 的函数 $f_k(t)$, 因为 $F_k, k = 1, 2, \cdots$ 都是无穷集合, 所以上述这些函数都是存在的. 如此继续下去, 便得到一个序列

$$f_1(t), f_2(t), \cdots, f_k(t), \cdots. \tag{3.12}$$

根据上述性质 1 和 2 就知, 对任何自然数 k 和 p, 都有

$$|f_k(t) - f_{k+p}(t)| < \frac{M_0}{2^{k-1}}, \quad t \in [c, d].$$

由此, 据柯西收敛准则即知序列 (3.12) 于 $[c, d]$ 上一致收敛.

现在考虑 F 是向量函数族的情形. 首先考虑由 F 中所有向量函数的第一个分量组成的函数族, 对它利用已证明的结论, 就知从中可抽出于 I 上一致收敛的函数序列. 再考虑 F 中以这一序列中的函数为第一分量的所有向量函数的第二个分量组成的函数族, 并对它应用已证明的结论, 从中抽出于 I 上一致收敛的函数序列. 如此继续下去, 最后可从 F 中向量函数的第 n 个分量中抽出一个于 I 上一致收敛的函数序列. 于是 F 中以这一序列中的函数为第 n 个分量的向量函数序列便在 I 上一致收敛. 引理至此证完. □

习　题

1. 举例说明引理 3.1 中的三个条件 (区间有限, 函数族一致有界, 等度连续) 缺一不可.

2. 设 $F = \{f_k(t)\}$ 是有限区间 $I = [c, d]$ 上的一连续函数序列. 证明: 若 F 中的每个子序列从中都可抽出在区间 I 上一致收敛的子序列, 则 F 是一致有界和等度连续的.

3.3 皮亚诺定理的证明

前已指出：由 (3.7),(3.4),(3.6) 表出的函数 $\varphi_m(t)$ 具有性质 1, 2, 3. 由性质 1 和性质 2 知，序列 $\{\varphi_m(t)\}$ 在有限区间 I_0 上一致有界且等度连续. 根据引理 3.1, 从中可抽出一个在区间 I_0 上一致收敛的子序列 $\{\varphi_{m_k}(t)\}$. 设其极限函数为 $\varphi(t)$. 作为连续函数序列的一致极限， $\varphi(t)$ 也在 I_0 上连续. 由 (3.8) 我们有

$$\varphi_{m_k}(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi_{m_k}(s))\mathrm{d}s+\Delta_{m_k}(t),\quad t\in I_0.$$

根据 $\{\varphi_{m_k}(t)\}$ 的一致收敛性和 $f(t,x)$ 的一致连续性知，当 $k\to+\infty$ 时，$f(t,\varphi_{m_k}(t))$ 于 I_0 上一致收敛于 $f(t,\varphi(t))$. 据此，再利用性质 3, 在上式中令 $k\to+\infty$ 取极限便得

$$\varphi(t)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s,\quad t\in I_0.$$

这说明 $x=\varphi(t)$ 是初值问题 (E), (1.1) 于区间 I_0 上的解. 定理证完.

推论 3.1 *若 $f(t,x)$ 于 (t,x) 空间的域 G 内连续，则对于 G 内每一点 (τ,ξ), 方程组 (E) 在含 τ 的某一区间 (其长度一般与 (τ,ξ) 有关) 上有解满足初值条件 (1.1).*

推论 3.2 *若 $f(t,x)$ 于 (t,x) 空间的域内 G 连续， D 是 (t,x) 空间的有界域，且 $\bar{D}\subset G$, 则存在 $h>0$, 使得对任意一点 $(\tau,\xi)\in D$, 方程组 (E) 有在 $|t-\tau|\le h$ 上有定义的解，满足初值条件 (1.1).*

证明 取有界域 G_0, 使得

$$\bar{D}\subset G_0,\quad \bar{G}_0\subset G.$$

以 ρ_0 表示 D 的边界 ∂D 与 G_0 的边界 ∂G_0 之间的距离 *. 则 $\rho_0>0$, 因而存在 $b>0$, 使得对任意 $(\tau,\xi)\in D$, 闭域

$$R:\quad |t-\tau|\le b,\quad |x-\xi|\le b$$

都含于 G_0 内. 取 M_0 为 $|f(t,x)|$ 于 $\bar{G}_0$ 的一个上界， $h=\min\{b,\frac{b}{M_0}\}$. 则由定理 3.1 知，方程组 (E) 有解满足初值条件 (1.1), 并且在 $|t-\tau|\le h$ 上有定义. □

*(t,x) 空间两个集合 X 与 Y 之间的距离定义为

$$\mathrm{d}(X,Y)=\inf_{\substack{(t,x)\in X\\(\tau,y)\in Y}}\mathrm{d}((t,x),(\tau,y)),$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)$, 并且

$$\mathrm{d}((t,x),(\tau,y))=((t-\tau)^2+(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

不难证明：若 X 与 Y 都是闭集，彼此不交，且其一为有界的，则 $\mathrm{d}(X,Y)>0$.

习 题

1. 试证明下列初值问题的解于指定区间有定义：

(1) $x' = e^{-t^2} + x^2, \quad x(0) = 0, \quad |t| \le \frac{1}{2}$;

(2) $x' = t^2 + x^2, \quad x(0) = 0, \quad |t| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$;

(3) $x' = \sin t + t + t^3 x^3, \quad x(0) = 0, \quad |t| \le \frac{1}{2}$;

(4) $x' = t^2 + e^{-x^2}, \quad x(0) = 0, \quad |t| \le 100$;

(5) $x' = \cos^2 t + \ln(1 + x^2), \quad x(0) = 0, \quad |t| \le 100$.

2. 证明隐函数方程

$$F(t, x) = 0$$

过原点有唯一的隐函数，且于 $0 \le t \le 100$ 有定义，其中

(1) $F(t, x) = e^{t+x} + x + 2t - 1$;

(2) $F(t, x) = e^t + \sin t - x^6 + x - 1$.

3. 如果在定理 3.1 中假设方程组 (E) 满足初值条件 (1.1) 的解至多只有一个，则在定理 3.1 证明中给出的欧拉折线序列 $\{\varphi_m(t)\}$, 当 $m \to +\infty$ 时，于 I_0 一致收敛.

4. (第一比较定理) 设纯量函数 $f(t, x)$ 和 $F(t, x)$ 于 (t, x) 平面域 G 连续，且

$$f(t, x) < F(t, x), \quad (t, x) \in G. \tag{3.13}$$

设 $(\tau, \xi) \in G$, 而 $x = \varphi(t)$ 和 $x = \Phi(t)$ 依次是初值问题

$$\begin{aligned} &x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi, \\ &x' = F(t, x), \quad x(\tau) = \xi \end{aligned} \tag{3.14}$$

的解，它们的共同存在区间为 $a < t < b$. 则

$$\varphi(t) < \Phi(t), \quad \tau < t < b; \quad \varphi(t) > \Phi(t), \quad a < t < \tau.$$

5. (第二比较定理) 若在前题中不等式 (3.13) 减弱为

$$f(t, x) \le F(t, x), \quad (t, x) \in G,$$

而 $x = \Phi(t)$ 加强为在 $\tau \le t < b$ 上是初值问题 (3.14) 的最大解 (即对 (3.14) 的任一解 $x = x(t)$, 在它于 $\tau \le t < b$ 有定义处成立 $x(t) \le \Phi(t)$); 在 $a < t \le \tau$ 上是 (3.14) 的最小解 (即对 (3.14) 的任一解 $x = x(t)$, 在它于 $a < t \le \tau$ 有定义处成立 $x(t) \ge \Phi(t)$), 则有结论：

$$\varphi(t) \le \Phi(t), \quad \tau \le t < b; \quad \varphi(t) \ge \Phi(t), \quad a < t \le \tau.$$

提示：若有点 $t_1 \in (\tau, b)$ 使得 $\varphi(t_1) > \Phi(t_1)$, 令 $\tau_0 = \sup\{t : \varphi(t) = \Phi(t), t \in [\tau, t_1]\}$, 则 $\varphi(\tau_0) = \Phi(\tau_0), \varphi(t) > \Phi(t), \tau_0 < t \leq t_1$. 对点 $(\tau_0, \varphi(\tau_0))$ 作闭域 $R : |t - \tau_0| \leq a, |x - \varphi(\tau_0)| \leq b$, 使得 $R \subset G$. 对任意自然数 n, 记 $x' = F(t,x) + \frac{1}{n}, x(\tau_0) = \varphi(\tau_0)$ 的解为 $x = \Phi_n(t)$. 它必于 $|t - \tau_0| \leq h$ 有定义，其中 $h = \min\{a, \frac{b}{M+1}\}$, M 是 $|F(t,x)|$ 在 R 上的一个上界. 在 $|t - \tau_0| \leq h$ 上对序列 $\{\Phi_n(t)\}$ 应用引理 3.1 和题 4, 即可推出矛盾.

6. 设纯量函数 $f(t,x)$ 于 (t,x) 平面域 G 连续，且 $(0,0) \in G$. 考虑初值问题

$$x' = t^{-\frac{1}{2}} f(t,x) + 1, \quad x(0) = 0. \tag{3.15}$$

则 (3.15) 有解. 此外，若 $f(t,x)$ 于 G 满足局部李氏条件，则 (3.15) 有唯一解.

7. 试用皮卡定理证明皮亚诺定理.

提示：用多项式序列 $\{F_k(t,x)\}$ 于 R 上一致逼近 $f(t,x)$, 并且考虑初值问题

$$x' = F_k(t,x), \quad x(\tau) = \xi$$

的解.