§ 4 柯西存在与唯一性定理 *

如果 $f(t,x)$ 在 (t,x) 空间某域 G 内 k 次连续可微， $x=\varphi(t)$ 在某区间 I 上是方程组 (E) 的解，则由将 $\varphi(t)$ 代入 (E) 得到的恒等式本身，依次就知 $\varphi(t)$ 的直到 $k+1$ 阶微商都是连续的．如果 $f(t,x)$ 在域 G 内无穷次连续可微，则方程组 (E) 的解 $x=\varphi(t)$ 也是无穷次连续可微的．本节研究如下的重要问题：如果 $f(t,x)$ 在域 G 内是解析的，那么方程组 (E) 是否存在解析解满足给定的初值条件？在第二章 § 7 中，我们曾就某些线性方程作出了肯定的回答．下面的柯西定理对一般方程组给出了同样的回答．在第二章 § 7 中，我们曾对一个变量的函数给出过解析的定义．类似地可以定义多元解析函数．我们说函数 $F(x_1,\cdots,x_m)$ 在点 $(x_1^0,\cdots,x_m^0)$ 的邻域 $|x_i-x_i^0|<r, i=1,\cdots,m$ 内是 **解析** 的，如果它在此邻域内可以展成 $(x_1-x_1^0),\cdots,(x_m-x_m^0)$ 的幂级数．如果函数 $F(x_1,\cdots,x_m)$ 在 $(x_1,\cdots,x_m)$ 空间某域 G 内每点的邻域内都是解析的，就说 $F(x_1,\cdots,x_m)$ 在此域内是解析的．如所熟知，幂级数在其收敛域内可逐项取任意多次微商，因此解析函数是无穷次可微的．根据上面所指出的，假如 $f(t,x)$ 在域 G 内是解析的，则方程组 (E) 的任何解都是无穷次可微的．柯西定理将告诉我们：这时方程组 (E) 的解不仅是无穷次可微的，而且是解析的．

4.1 优级数与优函数

用来证明柯西定理的工具是优级数与优函数，这一工具在关于解析方程的许多问题的研究中是很有力的．就两个变量的情形来引进优级数与优函数的概念．设有两个幂级数：

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}t^i x^j, \tag{a}$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}t^i x^j, \tag{A}$$

其中 $A_{ij}\geq 0$. 若

$$|a_{ij}|\leq A_{ij},$$

则说 (A) 是 (a) 的 **优级数**(不管它们收敛与否)．如果 (A) 还是收敛的，则其和 $F(t,x)$ 称为 (a) 的 **优函数**.

由定义立即可以得出关于优级数与优函数的如下性质：

1. 若 (A) 是 (a) 的优级数，且在

$$|t|\leq\alpha,\quad |x|\leq\beta;\quad \alpha,\ \beta\geq 0$$

内收敛，则根据阿贝尔 (Abel, 1802-1829) 定理，对任意 $\alpha',\beta',0<\alpha'<\alpha,0<\beta'<\beta$, 在闭子域

$$|t|\leq\alpha',\quad |x|\leq\beta'$$

上绝对一致收敛，则 (a) 也是这样.

2. 若 (A) 是 (a) 的优级数，而 $P_m(a_1,\cdots,a_{k_m})$ 是 (a) 的某些系数 $a_1,\cdots,a_{k_m}$ 之具非负系数的多项式，则幂级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(A_1,\cdots,A_{k_m})t^m$$

是

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_m(a_1,\cdots,a_{k_m})t^m$$

的优级数，这里 $A_1,\cdots,A_{k_m}$ 是 (A) 中那些与 (a) 中的 $a_1,\cdots,a_{k_m}$ 对应的系数.

3. 若 $f(t,x)$ 在

$$R: |t| \le \alpha,\ |x| \le \beta;\quad \alpha,\ \beta \ge 0$$

上可展为收敛的幂级数，则

$$F(t,x) = \frac{M}{(1-\frac{t}{\alpha'})(1-\frac{x}{\beta'})} \tag{4.1}$$

是 $f(t,x)$ 的优函数，此处 $0<\alpha'<\alpha,\ 0<\beta'<\beta, M$ 是某定数.

性质 1 根据魏尔斯特拉斯 (Weierstrass, 1815-1897) 判别法立即可得．性质 2 是明显的．下面证明性质 3. 按假设， $f(t,x)$ 在 R 内可展成幂级数：

$$f(t,x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} t^i x^j.$$

根据性质 1, 这个幂级数在

$$|t| \le \alpha',\quad |x| \le \beta'$$

上绝对一致收敛．特别，级数 $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty} |a_{ij}| {\alpha'}^i {\beta'}^j$ 收敛，因而 $|a_{ij}| {\alpha'}^i {\beta'}^j$ 有界：存在常数 M, 使得

$$|a_{ij}| {\alpha'}^i {\beta'}^j \le M,$$

即

$$|a_{ij}| \le \frac{M}{{\alpha'}^i {\beta'}^j}. \tag{4.2}$$

显然 (4.1) 中函数 $F(t,x)$ 的幂级数展式为

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{M}{\alpha'^i \beta'^j} t^i x^j.$$

由 (4.2) 就知， $F(t,x)$ 是 $f(t,x)$ 的优函数.

4.2 柯西定理及其证明

定理 4.1 若 $f(t,x)$ 在域

$$|t-\tau| < \alpha,\quad |x-\xi| < \beta;\quad \alpha,\ \beta > 0$$

内是解析的，则方程组 (E) 在 $t=\tau$ 附近有唯一解析解 $x=\varphi(t)$, 满足初值条件 $x(\tau)=\xi$.

证明 为简单计, 我们只就 $n=1$ 的情形来证明. 不妨设 $\tau=0, \xi=0$. 否则只需作变换 $t \to t-\tau, x \to x-\xi$, 就能化成这种情形．于是按定理的假设， $f(t,x)$ 在

$$R: |t| < \alpha,\quad |x| < \beta$$

内可展成 (必要时将 α, β 适当缩小)

$$f(t,x) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} t^i x^j. \tag{4.3}$$

先证唯一性．设 $x=\varphi(t)$ 在 $t=0$ 附近是 (E) 的解析解，满足初值条件

$$x(0) = 0. \tag{4.4}$$

于是 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 附近可展成

$$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_it^i. \tag{4.5}$$

为了证明解析解的唯一性，显然只须证明 (4.5) 的系数 $a_i, i=0,1,\cdots$ 由方程 (E) 和初值条件 (4.4) 唯一地确定. 为此，又只须进行下面的计算：

$$\begin{cases} a_0=\varphi(0), \\ a_1=\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_0=f(0,0)=a_{00}, \\ a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right)_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}f(t,\varphi(t))}{\mathrm{d}t}\right)_0 \\ \quad=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_0\right)=\frac{1}{2}(a_{10}+a_{01}a_{00}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m=\frac{1}{m!}\left(\frac{\mathrm{d}^{m-1}f(t,\varphi(t))}{\mathrm{d}t^{m-1}}\right)_0=P_m(a_{00},a_{10},a_{01},\cdots,a_{m-1,0},\cdots,a_{0,m-1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{4.6}$$

注意式中 P_m 显然是括弧内各量的确定的正系数多项式，它只与标号 m 有关，而与所论方程的具体形式无关.

现在再证明：系数由公式 (4.6) 定出的级数 (4.5) 在域

$$C_\rho:|t|\le\rho=r(1-e^{-\frac{1}{2M}})$$

内收敛，此处 $r\le\min\{\alpha,\beta\}$. 这一点一经证明，则由于 (4.6) 表明 $\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$ 与 $f(t,\varphi(t))$ 以及它们的各阶微商在 $t=0$ 处的值都相等，因此这两个解析函数具有相同的幂级数展式，即它们应该相等；换言之，$\varphi(t)$ 在 $t=0$ 附近是 (E) 的解. 又由于 $\varphi(0)=0$, 故 $\varphi(t)$ 满足初值条件 (4.4).

为了证明系数由公式 (4.6) 定出的级数 (4.5) 在 C_ρ 内收敛，采用柯西提出的优级数法，考虑辅助方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(t,x), \tag{4.7}$$

其中 $F(t,x)$ 是 $f(t,x)$ 的优函数. 这样的方程称为 (E) 的 **优方程**. 根据上述性质 3, 我们可取

$$F(t,x)=\frac{M}{(1-\frac{t}{r})(1-\frac{x}{r})},$$

其中 $r\le\min\{\alpha,\beta\}$. 将 $F(t,x)$ 展开：

$$F(t,x)=\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}t^ix^j,$$

则

$$|a_{ij}|\le A_{ij}. \tag{4.8}$$

由下列公式依次确定 A_i:

$$\begin{cases} A_0=0, \\ A_1=A_{00}, \\ A_2=\frac{1}{2}(A_{10}+A_{01}A_{00}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m=P_m(A_{00},A_{10},A_{01},\cdots,A_{m-1,0},\cdots,A_{0,m-1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{4.9}$$

考虑以这样定出的 A_i 为系数的幂级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i. \tag{4.10}$$

由 (4.8) 和上述性质 2 就知，(4.10) 是 (4.5) 的优级数．为了证明 (4.5) 在 C_ρ 内收敛，根据上述性质 1, 只须证明 (4.10) 在 C_ρ 内收敛．

为了证明 (4.10) 在 C_ρ 内收敛，又只须证明辅助方程 (4.7) 在 C_ρ 内有满足初值条件 (4.4) 的解析解．这是因为，如果这一点得到了证明，则根据前述关于唯一性的证明可知，(4.10) 一定是这个解析解在 C_ρ 内的幂级数展式，因而 (4.10) 必在 C_ρ 内收敛．

这样一来，问题就变成了一个简单方程的初等积分问题．对方程 (4.7), 即方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{(1-\frac{t}{r})(1-\frac{x}{r})},$$

用分离变量法可得到

$$\int_0^x \left(1-\frac{u}{r}\right)\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{M}{1-\frac{\tau}{r}}\mathrm{d}\tau.$$

从而

$$x - \frac{x^2}{2r} = -rM\ln(1-\frac{t}{r}).$$

这个关于 x 的二次方程有解

$$\Phi(t) = r - r\left(1+2M\ln(1-\frac{t}{r})\right)^{\frac{1}{2}},$$

并且这个解当 $t=0$ 时为零，而在 C_ρ 内是 t 的解析函数．定理证完． □

习　题

1. 证明：

(1) 方程

$$tx' = x - t$$

于 $t=0$ 没有关于 t 的形式幂级数;

(2) 方程

$$t^2x' = x - t$$

于 $t=0$ 有关于 t 的形式幂级数，但这个形式幂级数除了 $t=0$ 一点外发散．

2. 对 (E) 是 n 维向量方程组的情形，证明柯西定理．