# §5 解的延展与解的整体存在性

## 5.1 解的延展

通过前面的讨论，我们知道：当 $f(t,x)$ 在某域 $G$ 内连续时，初值问题 $(E)$, (1.1) 的解至少局部存在. 自然要考虑能否将一个在小区间上有定义的解延展到比较大的区间上去的问题.

假设 $x=\varphi(t)$ 是方程组 $(E)$ 在区间 $I$ 上的解. 如果存在这样的解 $x=\tilde{\varphi}(t)$, 它的定义区间为 $\tilde{I}$, $\tilde{I}\supset I$, $\tilde{I}\neq I$, 而在 $I$ 上， $\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t)$, 就说解 $x=\varphi(t)$**可以延展**, 而称 $x=\tilde{\varphi}(t)$ 为 $\varphi(t)$ 的一个 **延展**. 如果不存在具有上述性质的解，则称 $x=\varphi(t)$ 为 $(E)$ 的 **饱和解**.

有时我们也使用 **向右** (**左**) **延展**,**右** (**左**) **延展**,**右** (**左**) **饱和解** 等说法，其意义很容易推想到.

**引理 5.1** 设 $x=\varphi(t)$ 是 $(E)$ 于 $a\le t\le b$ 上的解， $x=\psi(t)$ 是 $(E)$ 于 $b\le t\le c$ 上的解. 若 $\varphi(b)=\psi(b)$, 则

$$x(t)=\begin{cases}\varphi(t), & a\le t\le b,\\ \psi(t), & b<t\le c\end{cases}$$

是 $(E)$ 于 $a\le t\le c$ 上的解.

**证明** 只须证明在 $t=b$ 处 $x(t)$ 满足方程组 $(E)$. 因为在 $a\le t\le b$ 上， $\varphi(t)$ 是 $(E)$ 的解，所以在 $t=b$ 处， $\varphi(t)$ 的左微商存在且等于 $f(b,\varphi(b))$. 又因为在 $b\le t\le c$ 上， $\psi(t)$ 是 $(E)$ 的解，所以在 $t=b$ 处 $\psi(t)$ 的右微商存在且等于 $f(b,\psi(b))$. 但 $x(b)=\varphi(b)=\psi(b)$, 故 $x(t)$ 在 $t=b$ 处的左右微商都存在且等于 $f(b,x(b))$. 证完. □

设 $f(t,x)$ 于 $(t,x)$ 空间域 $G$ 内连续， $x=\varphi_0(t)$ 是 $(E)$ 的一个解，定义在 $a_0\le t\le b_0$ 上. 因为 $(b_0,\varphi_0(b_0))\in G$, 故由推论 3.1 知， $(E)$ 有定义在某区间 $|t-b_0|\le h_1$ 上的解 $x=\psi_1(t)$, 满足 $\psi_1(b_0)=\varphi(b_0)$. 根据引理 5.1, 函数

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\varphi_0(t), & a_0\le t\le b_0,\\ \psi_1(t), & b_0<t\le b_0+h_1\end{cases}$$

是 $(E)$ 的一个解，它定义在 $a_0\le t\le b_0+h_1$ 上，因而是解 $x=\varphi_0(t)$ 的一个右延展. 这个右延展, 其定义区间比原有解的定义区间增长了 $h_1$. 由于 $(b_0+h_1,\varphi_1(b_0+h_1))\in G$, 再利用推论 3.1 又可得到 $(E)$ 的定义在某区间 $|t-(b_0+h_1)|\le h_2$ 上的解 $x=\psi_2(t)$, 满足 $\psi_2(b_0+h_1)=\psi_1(b_0+h_1)$, 从而得到 $x=\varphi_0(t)$ 的又一个右

延展

$$\varphi_2(t)=\begin{cases}\varphi_1(t), & a_0\le t\le b_0+h_1,\\ \psi_2(t), & b_0+h_1<t\le b_0+h_1+h_2,\end{cases}$$

它定义在 $a_0\le t\le b_0+h_1+h_2$ 上. 这次得到的右延展，其定义区间比原有解的定义区间增长了 $h_1+h_2$. 但需要注意，一般说来， $h_2$ 可能比 $h_1$ 小. 将这种延展手续不断进行下去，不难确信，我们终将得到 $(E)$ 的一个右饱和解. 同理可得到 $(E)$ 的一个左饱和解. 将右饱和解和左饱和解连接起来便得到 $(E)$ 的一个饱和解. 这一事实，在初值问题的局部解唯一的条件下不难证明.

**定理 5.1** *设 $f(t,x)$ 于 $(t,x)$ 空间域 $G$ 内连续. 如果对任一 $(\tau,\xi)\in G$, 初值问题 $(E)$, (1.1) 的解在含 $\tau$ 的某区间上是唯一的，则 $(E)$ 的任何非饱和解都可延展成为饱和解.*

**证明** 设 $x=\varphi_0(t)$ 为 $(E)$ 的任一非饱和解，定义在区间 $I_0$ 上，不妨设它左右两端都是非饱和的. 那么 $I_0$ 就应含有左右端点. 设 $I_0$ 为区间 $a_0\le t\le b_0$, $a_0,b_0$ 都是有限数. 以 $\beta>b_0$ 表示这样的数，它使得 $x=\varphi_0(t)$ 有一个定义在 $a_0\le t\le\beta$ 上的右延展，而以 $S$ 表示所有这样的数的集合. 因为 $(b_0,\varphi_0(b_0))\in G$, 我们可按上面所述方式得到 $x=\varphi_0(t)$ 的右延展，故集合 $S$ 不空. 记 $b=\sup S$. 根据 $b$ 的定义，存在一串严格递增的 $b_k\in S$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}b_k=b$. 根据 $S$ 的定义，对每一个 $b_k$, 都有 $x=\varphi_0(t)$ 的一个右延展 $x=\varphi_k(t)$, 它定义在 $a_0\le t\le b_k$ 上. 利用 §2 定理 2.3, 可知

$$\varphi_k(t)\equiv\varphi_{k-1}(t),\quad b_0\le t\le b_{k-1},\ k=1,2,\cdots,$$

特别就有 $\varphi_k(b_{k-1})=\varphi_{k-1}(b_{k-1})$, 故由

$$\varphi(t)=\begin{cases}\varphi_0(t), & a_0\le t\le b_0,\\ \varphi_k(t), & b_{k-1}<t\le b_k,\ k=1,2,\cdots\end{cases}$$

定义的函数 $\varphi(t)$ 是 $(E)$ 在 $a_0\le t<b$ 上的解. 假如 $x=\varphi(t)$ 还可向右延展，则 $b$ 必为有限数. 设 $x=\psi(t)$ 是它的一个右延展. 则它至少在 $a_0\le t\le b$ 上有定义，且 $(b,\psi(b))\in G$. 于是存在 $h>0$, 使得 $x=\varphi(t)$ 有一个至少在 $a_0\le t\le b+h$ 上有定义的右延展，它自然也是 $x=\varphi_0(t)$ 的右延展，这与 $b$ 的定义矛盾. 可见 $x=\varphi(t)$ 是一个右饱和解.

同理可证 $x=\varphi_0(t)$ 可延展成为左饱和解. 定理证完. □

任何饱和解 $x=\varphi(t)$ 的定义区间必定是一个开区间 $a<t<b$. 这是因为如果这个区间的某一端点，比如右端点是闭的，则 $b$ 是有限数，而 $(b,\varphi(b))\in G$, 因而 $x=\varphi(t)$ 就还能向右延展.

一个解不断向左向右延展，其趋势是，对应的解曲线不断向域 $G$ 的边界 "靠近"，这种 "靠近" 的趋势可通过不同的方式来刻画．下面的定理虽然刻画的比较粗，但也很有用．

**定理 5.2** 设 $f(t,x)$ 于 $(t,x)$ 空间域 $G$ 内连续，$D$ 是 $(t,x)$ 空间一有界域，且 $\bar{D}\subset G$. 则方程组 $(E)$ 经过 $D$ 中任一点的解曲线，经向左和向右延展，都可达到 $D$ 的边界．

**证明** 设 $x=\varphi_0(t)$ 为 $(E)$ 经过 $D$ 中某点的解曲线，定义在 $a_0\le t\le b_0$ 上．只考虑向右延展的情形，因为向左延展的情形同理．如果 $(b_0,\varphi_0(b_0))\notin D$, 则解曲线向右不须延展就已达到 $D$ 的边界．如果 $(b_0,\varphi_0(b_0))\in D$, 则根据 §3 推论 3.2, 存在 $h>0$, 使得 $(E)$ 有定义在 $|t-b_0|\le h$ 上的解曲线经过点 $(b_0,\varphi_0(b_0))$. 于是按上面所述的方式可得到 $x=\varphi_0(t)$ 的一个定义在 $a_0\le t\le b_0+h$ 上的右延展 $x=\varphi_1(t)$. 如果 $(b_0+h,\varphi_1(b_0+h))\notin D$, 则我们的目的已经达到．如果 $(b_0+h,\varphi_1(b_0+h))\in D$, 则再利用 §3 推论 3.2, 按上面所述方式又可得到 $x=\varphi_0(t)$ 的一个右延展，其定义区间为 $a_0\le t\le b_0+2h$. 按这种办法继续向右延展，由于 $D$ 是有界域，其上的点的 $t$ 坐标是有界的，而每延展一次，解曲线的定义区间都增长同一个数 $h$, 可见经有限步，解曲线必将越过 $D$ 的边界．证完.□

假如 $G$ 本身是一有界域, 则对经不断延展后的解曲线 "靠近" 边界的趋势，可刻画的更清楚．设 $x=\varphi(t)$ 是 $(E)$ 的任一解，以 $\rho(t)$ 表示对应的解曲线上点 $(t,\varphi(t))$ 与 $\partial G$ 的距离 (定义见 §3 推论 3.2 证明中的足注).

**定理 5.3** 设 $G$ 是 $(t,x)$ 空间一有界域，$f(t,x)$ 在 $G$ 内连续．对于 $(E)$ 的任一饱和解 $x=\varphi(t)$, 若其存在区间为 $a<t<b$, 则当 $t\to b_-$ 和 $t\to a_+$ 时都有

$$\lim\rho(t)=0. \tag{5.1}$$

**证明** 只考虑 $t\to b_-$ 的情形, 另一情形同理. 用反证法. 假如 (5.1) 当 $t\to b_-$ 时不成立，则存在递增地趋于 $b$ 的序列 $\{t_k\}$ 和正数 $\rho_0$, 使得

$$\rho(t_k)\ge\rho_0,\quad k=1,2,\cdots. \tag{5.2}$$

因为 $G$ 是有界域，故 $b$ 为有限数，且 $\{\varphi(t_k)\}$ 有界．按聚点原则，$\{\varphi(t_k)\}$ 中必存在收敛子序列，不妨设就是 $\{\varphi(t_k)\}$ 本身．记

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k)=x_0. \tag{5.3}$$

由 (5.2) 可知，$(b,x_0)\in G$.

下面进一步证明：

$$\lim_{t\to b_-}\varphi(t)=x_0. \tag{5.4}$$

假如这一点得到证明, 则解 $x=\varphi(t)$ 还能向右延展 (首先由 $(E)$ 和 (5.4) 知 $\frac{\mathrm{d}\varphi(b_-)}{\mathrm{d}t}$ 存在且等于 $f(b,\varphi(b_-))$, 故 $x=\varphi(t)$ 向右可延展到 $t=b$, 使得 $\varphi(b)=x_0$. 进而因为 $(b,x_0)\in G$, 解还能向右延展), 而与它是饱和解的假设矛盾. 这一矛盾表明: 当 $t\to b_-$ 时 (5.1) 必成立.

取 $\delta>0$ 适当小，使得

$$R:\ |t-b|\le\delta,\ \ |x-x_0|\le\delta$$

含于 $G$ 内.

为证 (5.4), 只须证明：存在 $k_0$, 使得当 $k\ge k_0$ 时,

$$|\varphi(t)-x_0|<\delta,\ \ t_k\le t<b. \tag{5.5}$$

这是因为只要证明了这一点，就有

$$|\varphi(t)-\varphi(t_k)|\le\int_{t_k}^{t}|f(\tau,\varphi(\tau))|\mathrm{d}\tau\le M(t-t_k),\quad t_k\le t<b,$$

其中 $M=\max\limits_{(t,x)\in R}|f(t,x)|$, 而由此及 (5.3) 便可推出 (5.4)

为证 (5.5), 我们取 $k_0$, 使得

$$b-t_k<\frac{\delta}{2(M+1)},\ \ |\varphi(t_k)-x_0|<\frac{\delta}{2},\ \ k\ge k_0. \tag{5.6}$$

因为 $t_k\to b_-$, 并且已证明 (5.3), 这样的 $k_0$ 存在. 假如 (5.5) 不成立, 则 $t_k\le t<b$ 上有 $t$ 值能使 $|\varphi(t)-x_0|\ge\delta$. 以 $\xi$ 表示这种 $t$ 值的下确界. 则显然

$$|\varphi(t)-x_0|<\delta,\ \ t_k\le t<\xi, \tag{5.7}$$

$$|\varphi(\xi)-x_0|=\delta. \tag{5.8}$$

于是一方面，由 (5.6) 的后一式和 (5.8), 对 $k\ge k_0$, 有

$$|\varphi(\xi)-\varphi(t_k)|\ge|\varphi(\xi)-x_0|-|x_0-\varphi(t_k)|>\frac{\delta}{2}.$$

但另一方面，由 (5.7)

$$|\varphi(\xi)-\varphi(t_k)|\le\int_{t_k}^{\xi}|f(\tau,\varphi(\tau))|\mathrm{d}\tau\le M(\xi-t_k),$$

从而由 (5.6) 的前一式知，对 $k\ge k_0$, 有

$$|\varphi(\xi)-\varphi(t_k)|<M\cdot\frac{\delta}{2(M+1)}<\frac{\delta}{2}.$$

这一矛盾就表明：对 $k\ge k_0$, (5.5) 必成立. 定理证完. □

为了进一步研究解的延展性态，特别是 $G$ 为无界域的情形，我们先证明下面的引理.

**引理 5.2** 对 $(t,x)$ 空间任何域 $G$, 恒存在一串有界域 $D_k, k=1,2,\cdots$, 使得

$$\bar{D}_k \subset D_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} D_k = G. \tag{5.9}$$

**证明** 若 $G$ 为整个 $(t,x)$ 空间，则引理的结论很容易证明，例如可取 $D_k = B_k(0)$, 此处和以下，$B_r(P)$ 表示 $(t,x)$ 空间中以 $P$ 为中心， $r$ 为半径的开球.

假设 $G$ 不是整个 $(t,x)$ 空间. 于是 $G$ 的边界 $\partial G$ 不是空集. 以 $r_P$ 表示点 $P$ 与 $G$ 的边界 $\partial G$ 的距离，即 $r_P = \inf\limits_{Q\in\partial G} \|P-Q\|$. 在 $G$ 内任取一点 $P_0$, 并记 $D_1 = B_{r_{P_0}/2}$. 显然 $\bar{D}_1 \subset G$, 因此对任意 $Q \in \partial D_1$, 都有 $r_Q > 0$. 记 $D_2 = D_1 \bigcup \bigcup\limits_{Q\in\partial D_1} B_{r_Q/2}(Q)$. 显然 $D_2$ 是一个有界域，且 $\bar{D}_1 \subset D_2, \bar{D}_2 \subset G$. 再记 $D_3 = D_2 \bigcup \bigcup\limits_{Q\in\partial D_2} B_{r_Q/2}(Q)$. 如此继续进行下去，我们就得到一串有界域 $D_k, k=1,2,\cdots$. 根据 $D_k, k=1,2,\cdots$ 的构造方式就知，它们满足 (5.9) 中第一式. 下面证明它们还满足 (5.9) 中第二式. 为此，用反证法. 假设

$$\tilde{G} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} D_k \neq G,$$

则存在点 $P_1 \in G \setminus \tilde{G}$. 因为 $G$ 是连通的，所以存在一条连接 $P_0$ 与 $P_1$ 而含于 $G$ 的连续曲线 $L$. 由于 $P_0 \in \tilde{G}, P_1 \notin \tilde{G}$, 故曲线 $L$ 上必有点 $Q_0 \in \partial\tilde{G}$. 对任意小正数 $\delta$, 在 $Q_0$ 的 $\delta$ 邻域内总有 $\tilde{G}$ 中的点，从而有某个 $D_k$ 中的点 ($k$ 的大小依赖于 $\delta$), 任取其一记为 $P_k$. 由于 $P_k \in D_k, Q_0 \notin D_k$(因为 $Q_0 \in \partial\tilde{G}$), 在点 $P_k$ 与点 $Q_0$ 的连线上必有 $\partial D_k$ 上的点，记为 $Q_k$. 由 $r_{Q_k}$ 的定义知，必有 $Q \in \partial G$, 使得

$$r_{Q_k} > \|Q_k - Q\| - \delta.$$

由此及

$$\|Q_0 - Q\| \geq r_{Q_0}, \quad \|Q_k - Q\| \geq \|Q_0 - Q\| - \|Q_k - Q_0\|$$

得到

$$r_{Q_k} > r_{Q_0} - 2\delta.$$

故若取 $\delta < \frac{r_{Q_0}}{6}$, 即 $r_{Q_0} > 6\delta$, 则 $r_{Q_k} > 4\delta$, 从而 $B_{2\delta}(Q_k) \subset B_{r_{Q_k}/2}(Q_k)$. 又因为 $Q_k \in B_\delta(Q_0)$, 故当 $\|Q_0 - P\| < \delta$ 时，有 $\|Q_k - P\| \leq \|Q_k - Q_0\| + \|Q_0 - P\| \leq 2\delta$, 即 $B_\delta(Q_0) \subset B_{2\delta}(Q_k)$. 因此我们有 $B_\delta(Q_0) \subset B_{r_{Q_k}/2}(Q_k)$. 但另一方面，根据 $D_k$ 的构造方式，应有 $B_{r_{Q_k}/2}(Q_k) \subset D_{k+1} \subset \tilde{G}$, 从而 $B_\delta(Q_0) \subset \tilde{G}$, 而与 $Q_0 \in \partial\tilde{G}$ 矛盾. 这一矛盾表明 (5.9) 的第二式必成立. 引理证完. □

利用引理 5.2, 我们首先可将定理 5.1 加以推广，即在"一般情形下"证明饱和解的存在性.

**定理 5.4** 设 $f(t,x)$ 于 $(t,x)$ 空间的域 $G$ 内连续. 则 $(E)$ 的任何非饱和解都可延展成为 $(E)$ 的饱和解.

**证明** 设 $x=\varphi_0(t)$ 为 $(E)$ 的任一非饱和解，定义在区间 $I_0$ 上. 不妨设 $I_0$ 是有限区间 $a_0 \leq t \leq b_0$.

根据引理 5.2, 存在一串有界域 $D_k, k=1,2,\cdots$, 使得 (5.9) 成立. 由于当 $a_0 \leq t \leq b_0$ 时， $(t,\varphi_0(t)) \in G$, 根据 $D_k, k=1,2,\cdots$ 的性质，易见当 $a_0 \leq t \leq b_0$ 时， $(t,\varphi_0(t))$ 必含于某个 $D_{k_0}$ 中. 不妨设 $k_0=1$. 由于 $(b_0,\varphi_0(b_0)) \in D_1$, 根据定理 5.2, 我们可将在 $a_0 \leq t \leq b_0$ 上有定义的解 $x=\varphi_0(t)$ 向右延展而得到 $x=\varphi_1(t)$, 它定义在区间 $a_0 \leq t \leq b_1$ 上，并且当 $a_0 \leq t \leq b_1$ 时， $(t,\varphi_1(t)) \in D_1$, 而 $(b_1,\varphi_1(b_1)) \in \partial D_1$. 由于 $\bar{D}_1 \subset D_2$, 我们有 $(b_1,\varphi_1(b_1)) \in D_2$. 于是再利用定理 5.2, 又可将解 $x=\varphi_1(t)$ 向右延展而得到在区间 $a_0 \leq t \leq b_2$ 上有定义的解 $x=\varphi_2(t)$, 并且当 $a_0 \leq t \leq b_2$ 时， $(t,\varphi_2(t)) \in D_2$, 而 $(b_2,\varphi_2(b_2)) \in \partial D_2$. 一般来说，如果已通过向右延展得到定义在 $a_0 \leq t \leq b_m$ 上的解 $x=\varphi_m(t)$, 并且当 $a_0 \leq t \leq b_m$ 时， $(t,\varphi_m(t)) \in D_m$, 而 $(b_m,\varphi_m(b_m)) \in \partial D_m$, 则由于 $\bar{D}_m \subset D_{m+1}$, 我们有 $(b_m,\varphi_m(b_m)) \in D_{m+1}$. 于是由

定理 5.2 知，又可将解 $x=\varphi_m(t)$ 向右延展而得到定义在区间 $a_0\le t\le b_{m+1}$ 上的解 $x=\varphi_{m+1}(t)$, 并且当 $a_0\le t\le b_{m+1}$ 时， $(t,\varphi_{m+1}(t))\in D_{m+1}$，而 $(b_{m+1},\varphi_{m+1}(b_{m+1}))\in\partial D_{m+1}$. 这样，便得到一串解 $x=\varphi_k(t),k=1,2,\cdots$, 其定义区间为 $a_0\le t\le b_k$, 并且 $b_k$ 随 $k$ 而增大. 设 $\lim\limits_{k\to+\infty}b_k=b$, $b$ 可以是 $+\infty$. 由

$$\varphi(t)=\begin{cases}\varphi_0(t), & a_0\le t\le b_0,\\ \varphi_k(t), & b_{k-1}<t\le b_k,\quad k=1,2,\cdots\end{cases}$$

定义的函数 $x=\varphi(t)$ 便是 $x=\varphi_0(t)$ 的右饱和解.

事实上, 如果 $x=\varphi(t)$ 的定义区间为 $a_0\le t\le b$, 但还能向右延展, 则 $b$ 必然为有限数. 设 $x=\psi(t)$ 是它的一个右延展, 则它至少在 $a_0\le t\le b$ 上有定义, 且 $(b,\psi(b))\in G$, 从而有自然数 $m_0$, 使得 $(b,\psi(b))\in D_{m_0}$. 注意到 $|f(t,\psi(t))|$ 于 $a_0\le t\le b$ 上有界，从

$$\psi(b)=\psi(b_k)+\int_{b_k}^{b}f(t,\psi(t))\mathrm{d}t=\varphi(b_k)+\int_{b_k}^{b}f(t,\psi(t))\mathrm{d}t$$

就知，当 $k\to+\infty$ 时， $(b_k,\varphi(b_k))\to(b,\psi(b))$. 由于 $(b,\psi(b))\in D_{m_0}$, 故当 $k$ 充分大时， $(b_k,\varphi_k(b_k))=(b_k,\psi(b_k))\in D_{m_0}$. 然而当 $k>m_0$ 时，有 $(b_k,\varphi_k(b_k))\in\partial D_k\not\in D_{m_0}$. 这一矛盾就表明 $x=\varphi(t)$ 确系 $x=\varphi_0(t)$ 的右饱和解.

同理可以证明： $x=\varphi_0(t)$ 可向左延展而成左饱和解. 定理证完. □

利用引理 5.2, 我们还可以得到刻画解的延展性态比定理 5.2 更为精细和清晰的结果.

**定理 5.5** 设 $f(t,x)$ 于 $(t,x)$ 空间的域 $G$ 内连续，$x=\varphi(t)$ 是 $(E)$ 的饱和解，其定义区间为 $a<t<b$. 若 $D_k,k=1,2,\cdots$ 为具有性质 $\bar D_k\subset D_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}D_k=G$ 的一串有界域. 则当 $t\to a_+$ 和 $t\to b_-$ 时，$(t,\varphi(t))$ 在下述意义下趋于 $G$ 的边界 $\partial G$: 对任何自然数 $k$, 恒存在常数 $a_k$ 和 $b_k$, 使得当 $a<t\le a_k$ 和 $b_k\le t<b$ 时， $(t,\varphi(t))\not\in D_k$.

**证明** 假如 $b=+\infty$, 则由于 $D_k$ 是有界的， $D_k$ 中的点的 $t$ 坐标有界，取 $b_k$ 为它的一个上界，显然当 $b_k\le t<b$ 时就有 $(t,\varphi(t))\not\in D_k$.

设 $b$ 为有限数. 记 $M_k$ 为 $|f(t,x)|$ 在 $\bar D_{k+1}$ 上的一个上界， $\rho_k$ 为 $\partial D_k$ 与 $\partial D_{k+1}$ 的距离. 由于 $\bar D_k\subset D_{k+1}$, 我们有 $\rho_k>0$. 选取 $b_k$, 使得

$$\max\left\{a,b-\frac{\rho_k}{M_k+1}\right\}<b_k<b.$$

则当 $b_k\le t<b$ 时，必有 $(t,\varphi(t))\not\in D_k$. 事实上，假如不然，设 $t_1\in[b_k,b)$, 使得 $(t_1,\varphi(t_1))\in D_k$, 则由定理 5.2 知，必有 $t_2\in(t_1,b)$, 使得

$$(t_2,\varphi(t_2))\in\partial D_{k+1};\quad (t,\varphi(t))\in D_{k+1},\quad t_1\le t\le t_2.$$

从而推出矛盾式

$$\begin{aligned}\rho_k &\le \mathrm{d}((t_2,\varphi(t_2)),(t_1,\varphi(t_1)))\le|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|+|t_2-t_1|\\ &= \left|\int_{t_1}^{t_2}f(t,\varphi(t))\mathrm{d}t\right|+|t_2-t_1|\\ &\le (M_k+1)(t_2-t_1)<(M_k+1)(b-b_k)\le\rho_k.\end{aligned}$$

同理可证，存在常数 $a_k$, 使得当 $a<t\le a_k$ 时， $(t,\varphi(t))\not\in D_k$. 定理全部证完. □

## 习 题

1. 证明在 §3 习题 1 中，前三小题之解不能延展于整个 $t$ 轴，而后两题之解可以延展于整个 $t$ 轴.

2. 证明 §3 习题 2 所确定的隐函数，必可延展于 $0 \le t < +\infty$.

3. 证明：如果 $f(t,x)$ 于 $(t,x)$ 空间某有界闭域 $G_0$ 连续，则方程组 $(E)$ 的任一饱和解，其存在区间必为闭区间.

4. 设 $f(t,x)$ 是纯量函数，于条形域 $G: a<t<b,\ |x|<+\infty$ 连续， $(\tau,\xi)\in G$. 证明：若 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 都是初值问题

$$x' = f(t,x), \quad x(\tau)=\xi \tag{5.10}$$

的解，均于 $a<t<b$ 有定义，且 $\varphi(t)\le\psi(t)$, 则域 $G$ 之介于 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 间的部分，被 (5.10) 的解所充满.

5. 设 $f(t,x)$ 是纯量函数，于 $(t,x)$ 平面连续. 证明：对任何 $\tau$, 只要 $\xi$ 适当小，初值问题

$$x' = (x^2-e^{2t})f(t,x), \quad x(\tau)=\xi$$

的解必可延展于 $\tau\le t<+\infty$.

6. 求出下述初值问题的饱和解

$$x' = 2t\sqrt{1-x^2}, \quad x(0)=0.$$

7. 设 $\xi>0$, 指出下述初值问题饱和解的存在区间

$$x' = \frac{1}{t^2+x^2}, \quad x(0)=\xi.$$

### 5.2 解的整体存在性 *

假设 $G$ 是由不等式

$$T_0<t<T_1, \quad |x|<+\infty$$

确定的域， $f(t,x)$ 在 $G$ 内连续. 根据延展定理容易证明，方程组 $(E)$ 的任一饱和解 $x=\varphi(t)$, 如果它是有界的，即存在常数 $C$, 使得 $|\varphi(t)|\le C$, 则 $x=\varphi(t)$ 的存在区间必是整个 $T_0<t<T_1$. 事实上，对任意小正数 $\delta$, 对域 $D: T_0+\delta<t<T_1-\delta, |x|<2C$ 用定理 5.2 就知，解曲线 $x=\varphi(t)$ 左右都可达到 $D$ 的边界，但由于 $|\varphi(t)|\le C$, 它不可能达到 $|x|=2C$, 故必可达到 $t=T_0+\delta$ 和 $t=T_1-\delta$, 即解 $x=\varphi(t)$ 至少在 $T_0+\delta<t<T_1-\delta$ 上有定义. 这时我们说方程组 $(E)$ 存在整体解. 下面讨论在什么条件下方程组 $(E)$ 存在整体解.

首先容易证明

**定理 5.6** *若 $f(t,x)$ 在域 $G: T_0<t<T_1, |x|<+\infty$ 上连续，且*

$$|f(t,x)|\le N|x|+B, \tag{5.11}$$

*其中 $N,B$ 是常数，则 $(E)$ 的任何饱和解 $x=\varphi(t)$ 都在 $T_0<t<T_1$ 上存在.*

**证明** 设 $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 的存在区间为 $a<t<b$. 要证明 $a=T_0, b=T_1$. 假如不然，比如 $b<T_1$, 则 $b$ 必为有限数. 我们来证明： $\varphi(t)$ 在 $t_0\le t<b$, $t_0\in(a,b)$ 上有界. 假如这一点得到了证明，则根据定理 5.2, $\varphi(t)$ 却又应该在 $t_0\le t<T_1$ 上有定义，这与 $b<T_1$ 的假设矛盾.

现在设 $x=\varphi(t)$ 在 $t_0\le t<b$ 上无界．令

$$r(t)=\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

显然 $r(t)$ 在 $a\le t<b$ 上连续，且在其不为零的点处连续可微．因为 $\varphi(t)$ 在 $t_0\le t<b$ 上无界，所以对任意正数 $K>r(t_0)+1$, 都有 $t_k,t_0<t_k<b$, 使得 $r(t_k)\ge K$. 根据 $r(t)$ 的连续性，必存在 $\tau_k,t_0<\tau_k<t_k$, 使得 $r(\tau_k)=r(t_0)+1$, 而且使得 $r(t)>0$, $\tau_k\le t\le t_k$. 在 $\tau_k\le t\le t_k$ 上计算 $\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\le|f(t,\varphi(t))|. \tag{5.12}$$

根据 (5.11), 由此得到

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\le N|\varphi(t)|+B\le N\sqrt{n}r(t)+B,\quad \tau_k\le t\le t_k. \tag{5.13}$$

从 $\tau_k$ 到 $t_k$ 积分上式得到

$$\ln(N\sqrt{n}r(t_k)+B)-\ln(N\sqrt{n}r(\tau_k)+B)\le N\sqrt{n}(t_k-\tau_k)\le N\sqrt{n}(b-t_0).$$

由于 $r(t_k)\ge K$, 而 $K$ 可任意大，故左端可任意大，而右端则是有限的，这不可能．这一矛盾表明 $x=\varphi(t)$ 在 $t_0\le t<b$ 上有界．定理于是得到了证明． □

定理 5.6 中的条件 (5.11) 可以推广成：

$$|f(t,x)|\le G(\|x\|),\quad (t,x)\in G, \tag{5.14}$$

其中 $G(s)$ 在 $s\ge 0$ 上连续，当 $s>0$ 时， $G(s)>0$, 且

$$\int_{s_0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{G(s)}=+\infty,\quad s_0>0. \tag{5.15}$$

**定理 5.7** *若 $f(t,x)$ 在 $G$ 内连续且满足条件 (5.14), (5.15), 则方程组 $(E)$ 的任何饱和解 $x=\varphi(t)$ 都在 $T_0<t<T_1$ 存在.*

**证明**　与定理 5.6 类似，只是在本定理的条件下，由 (5.12) 得到的不是 (5.13), 而是

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}\le G(r(t)),\quad \tau_k\le t\le t_k.$$

积分上式我们得到

$$\int_{r(\tau_k)}^{r(t_k)}\frac{\mathrm{d}s}{G(s)}\le t_k-\tau_k\le b-t_0.$$

由此利用条件 (5.15) 便可引出矛盾． □

## 习　题

1. 设 $f(t,x)$ 是向量函数，于 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$ 连续，并且 $f(t,x)$ 有界．则方程 $(E)$ 的初值问题的每个解均于整个 $t$ 轴存在.
2. 设 $f(t,x)$ 是向量函数，于 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$ 连续，并且 $|f(t,x)|\le A(t)|x|+B(t)$, 其中 $A(t)$ 和 $B(t)$ 均为于 $\mathbb{R}^1$ 连续的非负函数．则方程 $(E)$ 的初值问题的每个解均于整个 $t$ 轴存在.