§6 解对初值与参数的连续性

假设 $f(t,x)$ 在 (t,x) 空间的域 G 内连续，且局部地满足李氏条件．根据 §2 推论 2.1 和 §5 定理 5.1, 对任一 $(\tau,\xi)\in G$, 方程组 (E) 满足初值条件 $x(\tau)=\xi$ 的饱和解存在，而且是唯一的．我们可将它记为

$$x=\varphi(t,\tau,\xi).$$

设它的存在区间为 $(a(\tau,\xi),b(\tau,\xi))$. 那么它便是

$$S: t\in(a(\tau,\xi),b(\tau,\xi)),\quad (\tau,\xi)\in G \tag{6.1}$$

上的 $n+2$ 元向量函数．例如当 x 是纯量时，初值问题

$$x'=x,\quad x(\tau)=\xi$$

的解

$$x=\xi e^{t-\tau}$$

便是 t,τ,ξ 这三个变量的函数．

定理 6.1 设 $f(t,x)$ 于 (t,x) 空间的域 G 内连续，且局部地满足李氏条件．若 $x=\psi(t)$ 是 (E) 的一个解，而 $\alpha\le t\le\beta$ 是其存在区间的任一有限闭子区间，则存在 $\delta>0$, 使得当

$$\alpha\le\tau\le\beta,\quad |\xi-\psi(\tau)|\le\delta$$

时，(E) 的唯一解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 至少在 $\alpha\le t\le\beta$ 上有定义，并且对 (t,τ,ξ) 是闭域

$$V:\alpha\le t\le\beta,\quad \alpha\le\tau\le\beta,\quad |\xi-\psi(\tau)|\le\delta$$

上的连续函数．

这个定理无论在理论上和应用上都有重要意义．我们知道，在应用上，微分方程描述某种物理过程．将一个物理问题化成微分方程的初值问题时，初值条件是通过测量确定的，而测量不能总保证绝对准确．假如初值的微小误差竟然引起对应的解很大的变动，那么所求得的初值问题的解实用价值就会很小．有了上面的定理，这种情形就不会发生了．

定理 6.1 的证明 分三步进行：

1. 首先指出：当 $\delta_1>0$ 充分小时，闭域

$$U:\alpha\le t\le\beta,\quad |x-\psi(t)|\le\delta_1$$

含于 G 内，且 $f(t,x)$ 于 U 上满足李氏条件．

事实上，由于积分曲线段 $(t,\psi(t)), t\in[\alpha,\beta]$ 是 G 内一有界闭集，它与 G 的边界的距离是一个正数，因此只要取 $\delta_1>0$ 足够小，就能使 $U\subset G$, 且由于 U 是 G 中的有界闭域，根据有限覆盖定理就知， $f(t,x)$ 于 U 上满足李氏条件.

2. 为了证明定理 6.1, 我们用逐步逼近法. 我们希望能证明：当 $\delta>0$ 适当小时， $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 是闭域 V 上某一串连续函数的一致极限. 证明的基本程序与 §2 一样，所不同的只是零次近似的选取. 这里取零次近似为

$$\varphi_0(t,\tau,\xi)=\xi-\psi(\tau)+\psi(t).$$

然后依次由

$$\varphi_k(t,\tau,\xi)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi_{k-1}(s,\tau,\xi))\mathrm{d}s,\quad k=1,2,\cdots \tag{6.2}$$

确定 k 次近似 $\varphi_k(t,\tau,\xi)$. 取 $\delta>0$, 使得

$$\delta<e^{-N(\beta-\alpha)}\delta_1,$$

其中 N 为 $f(t,x)$ 在 U 上的李氏常数. 我们来证明：对所有 k 和 $(t,\tau,\xi)\in V$, 有 $(t,\varphi_k(t,\tau,\xi))\in U$, $\varphi_k(t,\tau,\xi)$ 连续，且

$$|\varphi_{k+1}(t,\tau,\xi)-\varphi_k(t,\tau,\xi)|\le\delta\cdot\frac{N^{k+1}|t-\tau|^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{6.3}$$

事实上， $\varphi_0(t,\tau,\xi)$ 显然于 V 上有定义且连续. 当 $(t,\tau,\xi)\in V$ 时，由

$$|\varphi_0(t,\tau,\xi)-\psi(t)|=|\xi-\psi(\tau)|\le\delta<\delta_1$$

知 $(t,\varphi_0(t,\tau,\xi))\in U$. 由 (6.2) 知， $\varphi_1(t,\tau,\xi)$ 也在 V 上有定义且连续. 当 $(t,\tau,\xi)\in V$ 时，注意到 $x=\psi(t)$ 满足积分方程组

$$\psi(t)=\psi(\tau)+\int_\tau^t f(s,\psi(s))\mathrm{d}s,$$

就得到

$$\begin{aligned}|\varphi_1(t,\tau,\xi)-\varphi_0(t,\tau,\xi)| &= \left|\int_\tau^t (f(s,\varphi_0(s,\tau,\xi))-f(s,\psi(s)))\mathrm{d}s\right|\\ &\le \left|\int_\tau^t N|\varphi_0(s,\tau,\xi)-\psi(s)|\mathrm{d}s\right|\\ &\le \delta N|t-\tau|.\end{aligned}$$

总之我们证明了当 $k=0$ 时要证明的结论成立.

假设上述结论当 $k=1,2,\cdots,m-1$ 时成立, 即 $\varphi_k(t,\tau,\xi)$ 在 V 上有定义, 连续且 (6.3) 成立. 于是, 由于 $\varphi_{m-1}(t,\tau,\xi)$ 在 V 上有定义, 连续且 $(t,\varphi_{m-1}(t,\tau,\xi))\in U$, 因此 $\varphi_m(t,\tau,\xi)$ 也在 V 上有定义, 连续, 且由

$$\begin{aligned}|\varphi_m(t,\tau,\xi)-\psi(t)| &= \left|\sum_{k=1}^{m}(\varphi_k(t,\tau,\xi)-\varphi_{k-1}(t,\tau,\xi))+\varphi_0(t,\tau,\xi)-\psi(t)\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{m}\delta\cdot\frac{N^k|t-\tau|^k}{k!}\le\delta e^{N|t-\tau|}<\delta_1\end{aligned}$$

知 $(t,\varphi_m(t,\tau,\xi))\in U$. 由 (6.2) 知, $\varphi_{m+1}(t,\tau,\xi)$ 也在 V 上有定义, 且当 $(t,\tau,\xi)\in V$ 时,

$$\begin{aligned}|\varphi_{m+1}(t,\tau,\xi)-\varphi_m(t,\tau,\xi)| &= \left|\int_\tau^t(f(s,\varphi_m(s,\tau,\xi))-f(s,\varphi_{m-1}(s,\tau,\xi)))\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left|\int_\tau^t N|\varphi_m(s,\tau,\xi)-\varphi_{m-1}(s,\tau,\xi)|\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left|\int_\tau^t\delta\cdot\frac{N^{m+1}|s-\tau|^m}{m!}\mathrm{d}s\right| \\ &= \delta\cdot\frac{N^{m+1}|t-\tau|^{m+1}}{(m+1)!}.\end{aligned}$$

这表明当 $k=m$ 时, 要证明的结论也成立. 因此, 按归纳法, 上述结论对任意自然数 k 均成立.

3. 由 (6.3) 易见, 序列 $\{\varphi_k(t,\tau,\xi)\}$ 于 V 上一致收敛, 其极限函数 $\psi(t,\tau,\xi)$ 自然是 V 上的连续函数. 在 (6.2) 中令 $k\to\infty$, 便得

$$\psi(t,\tau,\xi)\equiv\xi+\int_\tau^t f(s,\psi(s,\tau,\xi))\mathrm{d}s.$$

因此, $x=\psi(t,\tau,\xi)$ 作为 t 的函数是方程组 (E) 满足给定初值条件 $x(\tau)=\xi$ 的解. 由唯一性知应有

$$\psi(t,\tau,\xi)\equiv\varphi(t,\tau,\xi),\quad (t,\tau,\xi)\in V.$$

定理于是得到了证明.

推论 6.1 设 $f(t,x)$ 于 (t,x) 空间的域 G 内连续, 且局部地满足李氏条件. 若 (E) 的解 $x=\varphi(t,\tau_0,\xi_0)$ 在有限闭区间 $\alpha\le t\le\beta$ 上有定义, $\tau_0\in(\alpha,\beta)$, 则当 (τ,ξ) 与 (τ_0,ξ_0) 充分靠近时, 解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 也在区间 $\alpha\le t\le\beta$ 上有定义, 且对 $\alpha\le t\le\beta$ 一致地有

$$\lim_{(\tau,\xi)\to(\tau_0,\xi_0)}\varphi(t,\tau,\xi)=\varphi(t,\tau_0,\xi_0).$$

推论 6.2 若 $f(t,x)$ 于 (t,x) 空间的域 G 内连续，且局部地满足李氏条件，则 (E) 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 作为 t,τ,ξ 的函数，在由 *(6.1)* 表出的 S 上连续．此外， S 是 (t,τ,ξ) 空间的开集．

推论 6.1 是显然的．下面证明推论 6.2.

设 (t_0,τ_0,ξ_0) 是 S 中任意一点．考虑 (E) 之满足初值条件 $x(\tau_0)=\xi_0$ 的饱和解 $x=\varphi(t,\tau_0,\xi_0)$．于是存在有限闭区间 $\alpha\le t\le\beta$, 使得 $t_0,\tau_0\in(\alpha,\beta)$ 且 $\varphi(t,\tau_0,\xi_0)$ 在 $\alpha\le t\le\beta$ 上有定义．根据定理 6.1, 存在 $\delta>0$, 使得 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 于闭域

$$V:\ \alpha\le t\le\beta,\quad \alpha\le\tau\le\beta,\quad |\xi-\varphi(\tau,\tau_0,\xi_0)|\le\delta$$

上连续, 特别就在 (t_0,τ_0,ξ_0) 处连续. 由此同时还可看出，(t_0,τ_0,ξ_0) 是 S 的内点，即 (t_0,τ_0,ξ_0) 的充分小邻域内任何点 $(\tilde t_0,\tilde\tau_0,\tilde\xi)$ 都在 S 中. 这是因为当 $(\tilde t_0,\tilde\tau_0,\tilde\xi)$ 充分靠近 (t_0,τ_0,ξ_0) 时，我们有 $\alpha\le\tilde\tau_0\le\beta$(注意 $\tau_0\in(\alpha,\beta)$), $|\tilde\xi-\varphi(\tilde\tau_0,\tau_0,\xi_0)|\le\delta$, 故 $\varphi(t,\tilde\tau_0,\tilde\xi)$ 至少在 $\alpha\le t\le\beta$ 上有定义，即 $[\alpha,\beta]\subset(a(\tilde\tau_0,\tilde\xi),b(\tilde\tau_0,\tilde\xi))$．从而 $\tilde t_0\in(a(\tilde\tau_0,\tilde\xi),b(\tilde\tau_0,\tilde\xi))$(注意 $t_0\in(\alpha,\beta)$). 这说明充分靠近 (t_0,τ_0,ξ_0) 的点 $(\tilde t_0,\tilde\tau_0,\tilde\xi)$ 都在 S 中．推论于是得到了证明.

下面研究含参量 λ 的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x,\lambda), \tag{$(E)_\lambda$}$$

其中 λ 是 m 维向量．对于每个给定的 λ, $(E)_\lambda$ 就是已经研究过的方程组．但是当参量 λ 变动时，方程组 $(E)_\lambda$ 的结构发生变化，相应的解也将跟着发生变化．究竟 $(E)_\lambda$ 的解如何随 λ 的变化而变化，这个问题在应用上也有着重要意义．因为在由微分方程所描述的实际系统中，参量 λ 常常表征某种持续干扰因素的影响，而这种影响往往又无法准确地测量出来. 假如参量 λ 的微小误差引起对应解的显著变化，那么所求得的解就不能近似地描述所研究的现象，因而也就没有多大价值.

设 G 为 (t,x) 空间内某域， D 为 λ 空间内某域．假设 $f(t,x,\lambda)$ 在

$$G\times D:\ (t,x)\in G,\quad \lambda\in D$$

内连续，且对 (x,λ) 满足李氏条件．于是根据存在与唯一性定理，对每一 $\lambda\in D$, 方程组 $(E)_\lambda$ 的解都由初值 (τ,ξ) 唯一确定．这解应记为 $x=\varphi(t,\tau,\xi,\lambda)$．和前面一样，我们假设这个解是饱和的.

定理 6.2 设 $f(t,x,\lambda)$ 于域 $G\times D$ 内连续，且对 (x,λ) 局部地满足李氏条件．若 $x=\psi(t)$ 是 $(E)_{\lambda_0},\lambda_0\in D$ 的一个解， $\alpha\le t\le\beta$ 是其存在区间的任一有限闭子区间，则存在 $\delta>0$, 使得 $x=\varphi(t,\tau,\xi,\lambda)$ 于闭域

$$V:\ \alpha\le t\le\beta,\quad \alpha\le\tau\le\beta,\quad |\xi-\psi(\tau)|+|\lambda-\lambda_0|\le\delta$$

上有定义且连续.

证明 只须将定理 6.1 用于方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x,\mu), \\ \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

在 (6.4) 中, μ 是作为未知函数出现的. 根据我们的假设, (6.4) 右端的函数在 $G\times D$ 内连续, 且对 (x,μ) 局部地满足李氏条件. 因此定理 6.1 可以用. 再注意 (6.4) 之由初值 (τ,ξ,λ) 确定的解显然就是 $x=\varphi(t,\tau,\xi,\mu),\mu=\lambda$, 而相当于定理 6.1 中的特殊解 $x=\psi(t)$ 的, 现在是 $x=\psi(t)$, $\lambda=\lambda_0$. 可见本定理的结论是成立的. □

推论 6.3 设 $f(t,x,\lambda)$ 于域 $G\times D$ 内连续, 且对 (x,λ) 局部地满足李氏条件. 若 $(E)_{\lambda_0}$ 的解 $x=\varphi(t,\tau_0,\xi_0,\lambda_0)$ 在有限闭区间 $\alpha\le t\le\beta$ 上有定义, $\tau_0\in(\alpha,\beta)$, 则当 (τ,ξ,λ) 与 (τ_0,ξ_0,λ_0) 充分靠近时, 解 $x=\varphi(t,\tau,\xi,\lambda)$ 也在 $\alpha\le t\le\beta$ 上有定义, 且对 $\alpha\le t\le\beta$ 一致地有

$$\lim_{(\tau,\xi,\lambda)\to(\tau_0,\xi_0,\lambda_0)}\varphi(t,\tau,\xi,\lambda)=\varphi(t,\tau_0,\xi_0,\lambda_0).$$

推论 6.4 若 $f(t,x,\lambda)$ 于域 $G\times D$ 内连续, 且对 (x,λ) 局部地满足李氏条件, 则 $(E)_\lambda$ 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi,\lambda)$ 作为 t,τ,ξ,λ 的函数, 在它存在的范围

$$S:\quad t\in(a(\tau,\xi,\lambda),b(\tau,\xi,\lambda)),\quad (\tau,\xi,\lambda)\in G\times D \tag{6.5}$$

内连续.

注 6.1 在定理 *6.1* 和定理 *6.2* 中, 对函数 $f(t,x)$ 或 $f(t,x,\lambda)$ 所作的假设是保证 (E) 或 $(E)_\lambda$ 的解由初值唯一确定的一个充分条件. 定理表明: 这个条件在保证 (E) 或 $(E)_\lambda$ 的解由初值唯一确定的同时, 还保证了解对初值和参数的连续性. 不仅如此, 如果不用这个条件而一般地假定 $f(t,x)$ 在域 G 内连续且 (E) 的解由初值 $(\tau,\xi)\in G$ 唯一确定, 则定理 *6.1* 的结论仍成立; 这就是说, (E) 的解由初值唯一确定包含解对初值的连续性. 同样, 如果在定理 *6.2* 中, 一般地假定 $f(t,x,\lambda)$ 在域 $G\times D$ 内连续且对每一个 $\lambda\in D$, $(E)_\lambda$ 的解由初值 $(\tau,\xi)\in G$ 唯一确定, 则定理 *6.2* 的结论仍成立, 即 $(E)_\lambda$ 的解由初值唯一确定也包含了解对初值和参数的连续性. 证明可参看 *[7]* 第二章 *§4*. 顺便指出: 定解问题解的唯一性包含解对定解条件的连续相依性是一个相当普遍的现象, 学微分方程的人不可不知.

习 题

1. 设 $f(t,x)$ 于 (t,x) 空间域 G 连续，且保证方程组 (E) 的解恒由初值唯一确定．若

1) $x=\psi(t)$ 是 (E) 的一个解， $\alpha\le t\le\beta$ 是其存在区间的任一有限闭子区间；

2) 当 $k\to+\infty$ 时， $\xi_k\to\psi(\alpha)$,

则对任给的 $\varepsilon>0$, 当 k 充分大后 $x=\varphi(t,\alpha,\xi_k)$ 于 $\alpha\le t\le\beta$ 有定义，且

$$|\varphi(t,\alpha,\xi_k)-\psi(t)|<\varepsilon,\quad \alpha\le t\le\beta.$$

提示：取 $\delta>0$ 使得闭域 $U:\ \alpha\le t\le\beta, |x-\psi(t)|\le\delta$ 含于 G 内．记 M 为 $|f(t,x)|$ 于 U 的一个上界．先证明当 k 充分大后 $\varphi(t,\alpha,\xi_k)$ 必于 $\alpha\le t\le\alpha+\frac{\delta}{4M}$ 上有定义，再证明于此区间 $\{\varphi(t,\alpha,\xi_k)\}$ 一致收敛于 $\psi(t)$. 接着在 $\alpha+\frac{\delta}{4M}\le t\le\alpha+\frac{2\delta}{4M}$ 上考虑.

2. 设 $f(t,x)$ 是纯量函数，于 (t,x) 平面连续可微，且存在正数 A, 使得当 $|x|\ge A$ 时， $xf(t,x)\ge 0$. 证明必有点 $(0,\xi)$, 使得方程

$$x'=f(t,x)$$

过此点的解 $x=\varphi(t,0,\xi)$ 于 $-\infty<t<+\infty$ 上有定义.

提示：注意到当 $|\xi|\le A$ 时， $\varphi(t,0,\xi)$ 必于 $-\infty<t\le 0$ 有定义，因此只须找满足 $|\xi|\le A$ 的 ξ, 使得 $\varphi(t,0,\xi)$ 也于 $0\le t<+\infty$ 上有定义．用反证法．若满足 $|\xi|\le A$ 的 $\xi, x=\varphi(t,0,\xi)$ 都不能在 $0\le t<+\infty$ 上有定义，则 $x=\varphi(t,0,A)$ 必与直线 $x=A+1$ 相交， $x=\varphi(t,0,-A)$ 必与直线 $x=-A-1$ 相交．以二分法处理区间 $|\xi|\le A$, 即可推出矛盾.