§7 解对初值与参数的可微性

本节进一步研究方程组 (E) 或 $(E)_\lambda$ 的解对初值和参数的相依性. 首先我们证明一个简单然而却很有用的不等式, 称为 **贝尔曼** (Bellman, 1920-1984) **不等式** 或 **格龙瓦尔** (Gronwall, 1877-1932) **不等式**.

引理 7.1 设 $x(t), f(t)$ 都是纯量函数，在区间 $t_1 < t < t_2$ 上连续，非负. 如果对 $\tau \in (t_1, t_2)$, 有

$$x(t) \le k + \left| \int_\tau^t f(s)x(s)\mathrm{d}s \right|, \quad t \in (t_1, t_2), \tag{7.1}$$

其中 k 是非负常数，则

$$x(t) \le k e^{\left|\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s\right|}, \quad t \in (t_1, t_2). \tag{7.2}$$

证明 记 $V(t) = k + |\int_\tau^t f(s)x(s)\mathrm{d}s|$. 则 (7.1) 就是

$$x(t) \le V(t), \quad t \in (t_1, t_2). \tag{7.3}$$

当 $t \in [\tau, t_2)$ 时, $V(t) = k + \int_\tau^t f(s)x(s)ds$, 故由 (7.3), 有

$$V'(t) \equiv f(t)x(t) \le f(t)V(t),$$

即

$$V'(t) - f(t)V(t) \le 0.$$

两边乘以 $e^{-\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s}$, 得到

$$\left(V(t)e^{-\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s}\right)' \le 0.$$

从 τ 到 $t \in (\tau, t_2)$ 积分，得到

$$V(t)e^{-\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s} \le V(\tau) = k,$$

即

$$V(t) \le k e^{\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s}.$$

由此及 (7.3), 即得 (7.2).

当 $t_1 < t \le \tau$ 时, $V(t) = k - \int_\tau^t f(s)x(s)\mathrm{d}s$. 这时由 (7.3) 有

$$V'(t) \equiv -f(t)x(t) \ge -f(t)V(t),$$

即

$$V'(t) + f(t)V(t) \ge 0.$$

两边乘以 $e^{\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s}$, 得到

$$\left(V(t)e^{\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s}\right)' \geq 0.$$

从 τ 到 $t \in (t_1, \tau]$ 积分，得到

$$V(t)e^{\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s} \leq V(\tau) = k,$$

即

$$V(t) \leq ke^{-\int_\tau^t f(s)\mathrm{d}s}.$$

由此及 (7.3) 同样得到 (7.2). 引理证完. □

定理 7.1 *若 $f(t,x)$ 及其对 x 的各分量的偏微商于 (t,x) 空间域 G 内连续，则对每一 $(\tau,\xi)\in G$, (E) 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 作为 t,τ,ξ 的函数，在它的存在范围，即由 (6.1) 表出的开集 S 内连续可微.*

证明 由前节定理 6.1 的推论 6.2 知， $\varphi(t,\tau,\xi)$ 于域 S 内连续. 为证明定理，只须再证明：

1. $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\tau,\xi)$ 于 S 内存在且连续；
2. $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(t,\tau,\xi), i=1,\cdots,n$ 于 S 内存在且连续，这里 ξ_i 是 ξ 的第 i 个分量；
3. $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t,\tau,\xi)$ 于 S 内存在且连续.

先证 1. 因为 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 作为 t 的函数是 (E) 的解，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\tau,\xi) \equiv f(t,\varphi(t,\tau,\xi)). \tag{7.4}$$

由此首先知道， $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(t,\tau,\xi)$ 于 S 内存在；再由 $f(t,x)$ 和 $\varphi(t,\tau,\xi)$ 的连续性，进而还知道，它在 S 内连续.

再证 2. 任取一点 $(t_0,\tau_0,\xi_0)\in S$, 考虑 (E) 的解 $x=\varphi(t,\tau_0,\xi_0)$, 它的存在区间 $a(\tau_0,\xi_0)<t<b(\tau_0,\xi_0)$ 中必含 τ_0 和 t_0. 取其有限闭子区间 $\alpha\leq t\leq\beta$, 使得 $\tau_0,t_0\in(\alpha,\beta)$. 则由定理 6.1 知，有 $\delta>0$, 使得 $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 于域

$$V: \alpha<t<\beta,\quad \alpha<\tau<\beta,\quad |\xi-\varphi(\tau,\tau_0,\xi_0)|<\delta$$

的闭包 $\bar{V}$ 上有定义且连续.

从微商的定义出发，我们只须证明对任意点 $(t,\tau,\xi)\in V$, 当 $h\to 0$ 时，差商

$$\frac{\Delta\varphi}{h} = \frac{1}{h}(\varphi(t,\tau,\xi+he_i)-\varphi(t,\tau,\xi)) \tag{7.5}$$

的极限存在且连续，这里 e_i 是一 n 维向量，它除第 i 个分量为 1 外，其余分量全为零.

证明的指导思想出自下面的粗糙分析：由于

$$\varphi(t,\tau,\xi)=\xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s,\tau,\xi))\mathrm{d}s, \tag{7.6}$$

因此形式地有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(t,\tau,\xi)=e_i+\int_\tau^t f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi))\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(s,\tau,\xi)\mathrm{d}s, \tag{7.7}$$

其中 $f_x(t,x)$ 是 $f(t,x)$ 关于 x 的雅可比 (Jacobi, 1804-1851) 矩阵. 可见 $y=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(t,\tau,\xi)$ 应该是初值问题

$$\begin{cases} y'=f_x(t,\varphi(t,\tau,\xi))y, \\ y(\tau)=e_i \end{cases} \tag{7.8}$$

的解. 这暗示我们，差商 (7.5) 的极限应该是初值问题 (7.8) 的解.

设 $(t,\tau,\xi),(t,\tau,\xi+he_i)\in V$. 由于

$$\begin{aligned} \varphi(t,\tau,\xi+he_i) &= \xi+he_i+\int_\tau^t f(s,\varphi(s,\tau,\xi+he_i))\mathrm{d}s, \\ \varphi(t,\tau,\xi) &= \xi+\int_\tau^t f(s,\varphi(s,\tau,\xi))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

两式相减，除以 h, 利用中值定理，得到

$$\frac{\Delta\varphi}{h}=e_i+\int_\tau^t\left(f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi))+r\right)\frac{\Delta\varphi}{h}\mathrm{d}s, \tag{7.9}$$

其中

$$r=\int_0^1 f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi)+\theta\Delta\varphi)\mathrm{d}\theta-f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi)).$$

根据 $f_x(t,x)$ 和 $\varphi(t,\tau,\xi)$ 的连续性，当 $h\to 0$ 时，对 $(s,\tau,\xi)\in\bar{V}$ 一致地有

$$r\to 0. \tag{7.10}$$

设 M 是 $|f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi))|+|r|$ 于 $\bar{V}$ 上的一个正上界. 由 (7.9) 可得

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{h}\right|\le 1+\left|\int_\tau^t M\left|\frac{\Delta\varphi}{h}\right|\mathrm{d}s\right|.$$

于是根据引理 7.1, 有

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{h}\right|\le e^{M(\beta-\alpha)},\quad (t,\tau,\xi)\in V. \tag{7.11}$$

对给定的 $(\tau,\xi):\alpha<\tau<\beta,|\xi-\varphi(\tau,\tau_0,\xi_0)|<\delta$, 记初值问题 (7.8) 的解为 $y=y(t,\tau,\xi)$, 它满足

$$y(t,\tau,\xi)=e_i+\int_\tau^t f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi))y(s,\tau,\xi)\mathrm{d}s. \tag{7.12}$$

令 $u=\frac{\Delta\varphi}{h}-y(t,\tau,\xi)$. 由 (7.9), (7.12) 并注意到 (7.11), 得

$$\begin{aligned}|u| &= \left|\int_\tau^t\left(f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi))u+r\frac{\Delta\varphi}{h}\right)\mathrm{d}s\right| \\ &\le M\left|\int_\tau^t|u|\mathrm{d}s\right|+e^{M(\beta-\alpha)}\left|\int_\tau^t|r|\mathrm{d}s\right|.\end{aligned}$$

由 (7.10) 知，对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得当 $|h|\le\eta$ 时

$$|r|\le\varepsilon.$$

故当 $|h|\le\eta$ 时有

$$|u|\le\varepsilon(\beta-\alpha)e^{M(\beta-\alpha)}+M\left|\int_\tau^t|u|\mathrm{d}s\right|.$$

于是利用引理 7.1, 得到

$$|u|\le\varepsilon(\beta-\alpha)e^{2M(\beta-\alpha)}.$$

由此即见，对 $(t,\tau,\xi)\in V$ 一致地有 $\lim\limits_{h\to0}u=0$, 即

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta\varphi}{h}=y(t,\tau,\xi).$$

所以 $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(t,\tau,\xi)$ 于 V 内存在且连续.

最后证明 3. 从 (7.6) 形式地有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t,\tau,\xi)=-f(\tau,\xi)+\int_\tau^t f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi))\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(s,\tau,\xi)\mathrm{d}s,$$

即 $y=\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t,\tau,\xi)$ 应该是初值问题

$$\begin{cases} y'=f_x(t,\varphi(t,\tau,\xi))y, \\ y(\tau)=-f(\tau,\xi)\end{cases} \tag{7.13}$$

的解. 完全类似于步骤 2 的证明，可以证明 $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t,\tau,\xi)$ 存在且连续. □

注 7.1 从定理的证明我们看到 $y=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(t,\tau,\xi)$ 和 $y=\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t,\tau,\xi)$ 分别是初值问题 *(7.8)* 和 *(7.13)* 的解. 由此知, 当 $n=1$ 时, 我们可得到下列公式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(t,\tau,\xi)=\exp\left\{\int_\tau^t f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi))\mathrm{d}s\right\},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t,\tau,\xi)=-f(\tau,\xi)\exp\left\{\int_\tau^t f_x(s,\varphi(s,\tau,\xi))\mathrm{d}s\right\}.$$

注 7.2 反复利用 *(7.4), (7.8), (7.13)*, 我们可以进一步得到关于解对初值的高阶可微性定理. 比如, 若 $f(t,x)$ 对 x 的直到 $r\ge 1$ 阶微商都在域 G 内连续, 则 $\varphi(t,\tau,\xi)$ 对 ξ 的直到 r 阶微商都连续. 又比如, 若 $f(t,x)$ 在域 G 内 $r\ge 1$ 次连续可微, 则 $\varphi(t,\tau,\xi)$ r 次连续可微, 并且对 t 的 $r+1$ 阶微商也是连续的.

对于含参量 λ 的方程组 $(E)_\lambda$, 可以如前节通过引进新未知函数, 把解对初值与参数的可微性, 转化为方程组 (6.4) 的解对初值的可微性. 沿用前节的记号, 由定理 7.1 及其证明, 我们可得到下面的定理.

定理 7.2 若 $f(t,x,\lambda)$ 及其对 x 与 λ 的各个分量的偏微商于域 $G\times D$ 内连续, 则对每一 $(\tau,\xi,\lambda)\in G\times D$, $(E)_\lambda$ 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi,\lambda)$ 作为 t,τ,ξ,λ 的函数在它的存在范围内连续可微. 此外, $y=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(t,\tau,\xi,\lambda)$, $y=\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t,\tau,\xi,\lambda)$, $y=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j}(t,\tau,\xi,\lambda)$ 依次是下列初值问题的解:

$$y'=f_x(t,\varphi(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)y,\quad y(\tau)=e_i;$$

$$y'=f_x(t,\varphi(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)y,\quad y(\tau)=-f(\tau,\xi,\lambda);$$

$$y'=f_x(t,\varphi(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda)y+f_{\lambda_j}(t,\varphi(t,\tau,\xi,\lambda),\lambda),\quad y(\tau)=0,$$

其中 λ_j 是 λ 的第 j 个分量.

习 题

1. 设 $x(t),f(t)$ 均系纯量函数, 于 $\alpha\le t\le\beta$ 上连续. 若有实数 k 使得

$$x(t)\le k+\int_\alpha^t|f(s)|x(s)\mathrm{d}s,\quad \alpha\le t\le\beta,$$

则

$$x(t)\le ke^{\int_\alpha^t|f(s)|\mathrm{d}s},\quad \alpha\le t\le\beta.$$

2. 设 $x(t),f(t)$ 和 $g(t)$ 都是纯量函数, 于区间 I 上连续, 非负. 如果对 $\tau\in I$ 有

$$x(t)\le g(t)+\left|\int_\tau^t f(s)x(s)\mathrm{d}s\right|,\quad t\in I,$$

则

$$x(t) \le g(t) + \left| \int_\tau^t f(\xi) g(\xi) e^{\int_\xi^t f(s) \mathrm{d}s} \mathrm{d}\xi \right|, \quad t \in I.$$

提示：记 $V(t) = |\int_\tau^t f(s)x(s)\mathrm{d}s|$, 然后类似引理 7.1 推导.

3. 设 $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ 是初值问题

$$x' = \sin(tx), \quad x(\tau) = \xi$$

的饱和解. 求 $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ 在 $(t, \tau, \xi) = (t, 0, 0)$ 处的值.

提示：注意 $\varphi(t, 0, 0) = 0$.

4. 设 $x = \varphi(t, \tau, \xi, \lambda)$ 是初值问题

$$x' = x + \lambda(t + x^2), \quad x(\tau) = \xi$$

的饱和解，这里 λ 是参数. 求 $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$ 在 $(t, \tau, \xi, \lambda) = (t, 0, 1, 0)$ 处的值.

5. 设 $f(t, x)$ 及其对 x 各个分量的偏微商于 (t, x) 空间连续， $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ 是 (E) 过点 (τ, ξ) 之饱和解. 则有恒等式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t, \tau, \xi) + \Phi(t, \tau, \xi) f(\tau, \xi) \equiv 0,$$

这里 $\Phi(t, \tau, \xi)$ 是 $n \times n$ 矩阵，其第 i 列元素为 $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(t, \tau, \xi)$.

提示： $y = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}(t, \tau, \xi)$ 是初值问题 (7.8) 的解，而 $y = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(t, \tau, \xi)$ 是 (7.13) 的解，建立它们间的联系.