§8 对于 n 阶方程的推论

我们知道， n 阶正规形微分方程

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \tag{$(E)_n$}$$

在引进未知函数

$$x_1 = x,\ x_2 = x',\ \cdots,\ x_n = x^{(n-1)}$$

后，可以化成下述形式的等价方程组：

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}' = x_n, \\ x_n' = f(t, x_1, \cdots, x_n), \end{cases}$$

而 $(E)_n$ 的初值条件

$$x(\tau) = \xi_0,\quad x'(\tau) = \xi_1,\quad \cdots,\quad x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \tag{8.1}$$

则变为等价方程组的下述初值条件：

$$x_1(\tau) = \xi_0,\quad x_2(\tau) = \xi_1,\quad \cdots,\quad x_n(\tau) = \xi_{n-1}.$$

根据这种等价性，本章前几节所有关于方程组的结果，都可以搬到方程 $(E)_n$ 上来．例如，若 $f(t, x_1, \cdots, x_n)$ 于闭域

$$R:\ |t-\tau| \le a,\ |x_1 - \xi_0| + \cdots + |x_n - \xi_{n-1}| \le b \tag{8.2}$$

上连续，则方程 $(E)_n$ 满足初值条件 (8.1) 的解于 $|t-\tau| \le h$ 上存在，此处 $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, 而 M 是函数 $|x_2| + \cdots + |x_n| + |f(t, x_1, \cdots, x_n)|$ 在 R 上的任一上界．又如，若 $f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 空间域 G 内连续，则 $(E)_n$ 的任何非饱和解，恒可向左，向右延展成饱和解；饱和解的存在区间必为某一开区间 $a < t < b$, 并且当 $t \to a_+$ 和 $t \to b_-$ 时，点 $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t))$ 趋于 G 的边界．若 $f(t, x_1, \cdots, x_n)$ 在 R 上连续，且满足李氏条件，即存在常数 N, 使得对任何 $(t, x_1, \cdots, x_n), (t, y_1, \cdots, y_n) \in R$, 都有

$$|f(t, x_1, \cdots, x_n) - f(t, y_1, \cdots, y_n)| \le N(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|),$$

则方程 $(E)_n$ 在某一区间 $|t-\tau| \le h$ 上只能有一个解，满足初值条件 (8.1).

没有必要写出所有与前面各节平行的结果．读者可以作为练习自己去完成.

习 题

1. 记 $x=\varphi(t)$ 和 $x=\psi(t)$ 依次是摆方程

$$x''+\sin x=0$$

满足初值条件 $x(0)=\frac{\pi}{2}, x'(0)=0$ 和 $x(0)=0, x'(0)=2$ 的解．证明：

1） $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 均可延展于整个 t 轴；

2） $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 依次是偶函数和奇函数；

3） $|\varphi(t)|\le\frac{\pi}{2}, |\psi(t)|\le\pi, t\in(-\infty,+\infty)$；

4） $\psi'(t)>0$, 且 $\psi(t)\to\pi$, 当 $t\to+\infty$.

提示: 方程两端乘以 $2x'$, 便可推出 $\varphi'^2(t)\equiv 2\cos\varphi(t)$, $\psi'^2(t)\equiv 2(1+\cos\psi(t))$. 推理中注意 $x=\pi$ 也是原方程的解.

2. 证明下列方程的任一解均可延展于整个 t 轴.

1） $x''+x+2x^3=0$;

2） $x''+x'+x+2x^3=0$.

提示：方程两边乘以 $2x'$.

3. 设纯量函数 $f(t,x_1,x_2)$ 于 (t,x_1,x_2) 空间连续可微．记初值问题

$$x''=f(t,x,x'),\quad x(\tau)=\xi_0,\quad x'(\tau)=\xi_1$$

的解为 $x=\varphi(t,\tau,\xi_0,\xi_1)$. 试写出 $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}$ 所满足的初值问题.

4. 如果 $f(t,x_1,x_2)$ 是 (t,x_1,x_2) 空间有界的连续可微函数, 且 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(t,x_1,x_2)\ge 0$, 则边值问题

$$x''=f(t,x,x'),\quad x(0)=0=x(1)$$

的解存在，唯一.

提示：只须证明上题之函数 $\varphi(t,0,0,\xi_1)$ 于 $0\le t\le 1$ 存在，且有唯一的 ξ_1 使得 $\varphi(1,0,0,\xi_1)=0$. 后一点只须证明： $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}(1,0,0,\xi_1)>0$ 及有实数 δ_1,δ_2, 使得 $\varphi(1,0,0,\delta_1)\le 0\le\varphi(1,0,0,\delta_2)$.