§ 9 解非线性方程的连续性方法 *

本节的目的是要阐述如何利用微分方程的理论来讨论非线性方程

$$F(x) = 0 \tag{F}$$

的求解问题，这里 F 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中某域上的一个给定的 n 维向量函数，我们总假定它是连续可微的.

9.1 古典牛顿法

假设 x_0 是 (F) 的一个解，矩阵 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ 的逆 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}$ 于闭球 $\bar{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ 上存在，且

$$\left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}(x)\right| \leq M < +\infty, \quad x \in \bar{B}_r(x_0).$$

为了求 (F) 的解 x_0, 我们先取 $\xi \in B_r(x_0)$(看成 (F) 的近似解), 并考虑下述辅助方程

$$H(x,t) \equiv F(x) - (1-t)F(\xi) = 0, \quad t \in [0,1]. \tag{F_*}$$

由隐函数定理，至少当 $|t|$ 充分小时， (F_*) 有唯一连续可微解 $x(t)$. 将 $x = x(t)$ 代入 (F_*), 然后对 t 微分两端，我们得到

$$x' = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}(x)F(\xi). \tag{9.1}$$

此外， $x = x(t)$ 还满足

$$x(0) = \xi. \tag{9.2}$$

显然，如果上述初值问题的解 $x(t)$ 可延展到 $t = 1$, 则将 $x(t)$ 代入 (9.1) 后，积分并利用条件 (9.2), 就知 $x(t)$ 是 (F_*) 的解，特别 $x(1)$ 就是 (F) 的一个解 (可能有 $x(1) \neq x_0$). 这样，求解 (F) 的问题就转化为求解常微分方程的初值问题，以及解的可延展问题．这一方法通常称为 **古典牛顿法**. 我们有如下定理.

定理 9.1 *如果除上面的假设外，还假设 (F) 于 $\bar{B}_r(x_0)$ 上有唯一解 x_0, 并且初始近似点 ξ 满足*

$$\xi \in B_{\frac{r}{2}}(x_0), \quad 2M|F(\xi)| < r,$$

则初值问题 (9.1), (9.2) 的解 $x(t)$ 至少在 $|t| \leq 1$ 上存在，并且 $x(1) = x_0$. 这样，跟踪解曲线 $x = x(t)$ 就能求得 (F) 的解.

证明 注意到对任何 x, 有 $\|x\| \leq |x|$, 由 $\xi \in B_{\frac{r}{2}}(x_0)$ 就知，集合 $\{x : |x - \xi| \leq \frac{r}{2}\}$ 包含在 $\bar{B}_r(x_0)$ 中，故 (9.1) 右端的函数在 $|x - \xi| \leq \frac{r}{2}$ 上连续，而 $M|F(\xi)|$ 是 (9.1) 右端函数的一个上界．根据皮亚诺定理，初值问题 (9.1), (9.2) 的解 $x(t)$ 在 $|t| \leq \frac{r}{2M|F(\xi)|}$ 上存在 (注意当 $F(\xi) = 0$ 时定理的结论显然成立，故不妨设 $F(\xi) \neq 0$)．按假设， $\frac{r}{2M|F(\xi)|} > 1$, 故 $x(t)$ 至少在 $|t| \leq 1$ 上存在． $x(1)$ 就是 (F) 的解．而按假设， (F) 在 $\bar{B}_r(x_0)$ 只能有一个解，故 $x(1) = x_0$. □

从定理 9.1 我们看到, 古典牛顿法一般只具有局部收敛性, 即只有选择初始近似点在真解的小邻域内, 才能保证 (9.1) 的解曲线 $x = x(t)$ 当 $t \to 1$ 时通向所要求的 (F) 的解.

不过，我们有下面的大范围收敛性结果.

定理 9.2 *假设*

1) 对任意 x, $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}(x)$ 存在，并且存在正值连续函数 $G(r), r \in [0, +\infty)$, 满足

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r}{G(r)} = +\infty, \quad r_0 > 0,$$

使得

$$\left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}(x)\right| \leq G(\|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

2) (F) 于 $\mathbb{R}^n$ 上的解唯一.

则对任意一点 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 初值问题 (9.1),(9.2) 的解 $x(t)$ 至少在 $|t| \le 1$ 上存在. 因此 (F) 于 $\mathbb{R}^n$ 有唯一解 x_0, 跟踪每条解曲线 $x = x(t)$ 都能求得 (F) 的解.

证明 根据解的整体存在性定理 (第四章定理 5.7), 对任何 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 初值问题 (9.1),(9.2) 的饱和解 $x(t)$ 都在 $|t| < \infty$ 上存在. $x(1)$ 便是 (F) 的解, 且 $x(1) = x_0$. □

习 题

1. 给出定理 9.2 的详细的证明.
2. 假设在定理 9.2 中 1) 成立. 证明: 对任意 $y \in R^n$, 方程

$$F(x) = y$$

都有解, 因此, $F : R^n \to R^n$ 是满射.

3. 举例说明 2 题中的条件不可缺少.

9.2 一般的连续性方法

在数学上, 人们常常尝试将一个复杂方程的求解问题, 与一个比较简单的方程的求解问题联系在一起, 加以研究, 以确定或求出复杂方程的解. 在上面的处理中, 我们使用方程族 (F_*) 将所考虑的方程 $F(x) = 0$ 与一个有解的方程 $F(x) = F(\xi)$ 联系起来. 实际上, 方程族 (F_*) 中的函数 $H(x,t)$, 根据问题的特点, 可以有不同的选择, 例如

$$H(x,t) \equiv tF(x) + (1-t)(x - x_0) = 0, \quad t \in [0,1] \qquad (F_{**})$$

也是一种常见的形式, 其中 x_0 是给定的.

一般地, 已知一个方程 $g(x) = 0$ 的解, 为了确定或求出另一个方程 $f(x) = 0$ 的解, 人们设计一个函数 $H(x,t)$, 使得

$$H(x,0) = g(x), \quad H(x,1) = f(x), \qquad (9.3)$$

而考虑辅助方程

$$H(x,t) = 0, \quad t \in [0,1]. \qquad (H)$$

设 ξ 为方程 $g(y) = 0$ 的解. 假如能求得 (H) 的一个满足条件 (9.2), 并且在 $[0,1]$ 上有定义的解 $x(t)$, 则由于

$$H(x(1),1) = f(x(1)),$$

我们便得到 $f(x) = 0$ 的一个解 $x(1)$. 这种从方程 $g(x) = 0$ 的解出发去确定或寻找方程 $f(x) = 0$ 的解的方法, 称为 **连续性方法**. 通常称 $H(x,t)$ 为 **同伦映射**, 它将 $g(x)$ 连续变到 $f(x)$. (F_*) 中的 $H(x,t)$ 称为 **牛顿同伦**,(F_{**}) 中的 $H(x,t)$ 称为 **凸组合同伦**.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为一域, 对 $x \in D, t \in [0,1], H(x,t)$ 连续可微, 且 $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}(x,t)$ 存在. 若 $x(t)$ 是 (H) 的连续可微解, 代入 (H) 后, 两端对 t 微分, 可得

$$x' = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}(x,t)\frac{\partial H}{\partial t}(x,t). \qquad (9.4)$$

反之, 若 $x(t)$ 是初值问题 (9.4), (9.2) 的解, 在 $[0,1]$ 上存在, 则积分 (9.4) 便知 $x(t)$ 是 (H) 的解, 特别, $x(1)$ 就是 $f(x) = 0$ 的解.

利用延展定理, 通过类似解的整体存在性定理 (第四章定理 5.7) 的证明可得到下面的结果.

定理 9.3 *假设对 $x \in D, t \in [0,1]$, $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}(x,t)$ 存在，并且存在正值连续函数 $G(r)$, $r \in [0,+\infty)$, 满足 $\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r}{G(r)} = +\infty (r_0 > 0)$, 使得*

$$\left|\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}(x,s)\frac{\partial H}{\partial s}(x,s)\right| \leq G(\|x\|), \quad x \in D,\ s \in [0,1].$$

则对任意满足 $g(\xi) = 0$ 的点 $\xi \in D$, 初值问题 (9.4), (9.2) 的解 $x(t)$ 均在 $[0,1]$ 上存在，并且 $f(x(1)) = 0$. 因此，从 $g(x) = 0$ 的解 ξ 出发，跟踪解曲线 $x = x(t)$ 就能求得方程 $f(x) = 0$ 的解.

在定理 9.3 中，我们要求 $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}(x,t)$ 对 $x \in D, t \in [0,1]$ 存在. 应用上，这个条件时常得不到满足. 因此，我们需要进一步考虑这个条件不满足时的情形. 为此，我们视 t 为另一个参数 s 的函数，而考虑方程:

$$H(x(s),t(s)) = 0, \quad s \geq 0, \tag{H_*}$$

其中 $H(x,t)$ 满足 (9.3). 这时与 (9.4) 对应的是如下的隐式微分方程

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)x' + \frac{\partial H}{\partial t}(x,t)t' = 0, \quad s \geq 0. \tag{9.5}$$

这是一个由 n 个方程组成的关于 $n+1$ 个未知量 (x',t') 的代数方程组. 通过这种途径，人们已经进一步发展了上述的连续性方法.

定理 9.4 *设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为有界域. 又*

1) 对 $x \in \bar{D}, t \in [0,1]$,

$$\mathbf{rank}\left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial t}\right) = n;$$

2) 对每一 $t \in [0,1]$, 方程 $H(x,t) = 0$ 于 $\bar{D}$ 的解 x 满足 $x \in D$;

3) 方程 $H(x,0) = 0$ 于 D 有唯一解 ξ, 并且 $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}(\xi,0)$ 存在.

则存在 $s^* > 0$(可以是 $+\infty$), 使得 (9.5) 的从 $(\xi,0)$ 出发的解 $(x(s),t(s))$ 当 $s \to s^*_-$ 时通向点 $(x_*,1)$, 并且 $f(x_*) = 0$.

基本上利用上述定理，人们给出了布劳威尔 (Brouwer, 1881-1966) 不动点定理的一个构造性的证明.