§1 解的稳定性

1.1 李雅普诺夫稳定性

考虑方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \tag{E}$$

其中 $f(t,x)$ 在 $\mathbb{R}^1 \times G$ 内连续，且局部地满足李氏条件，这里 G 是 x 空间的某域. 对 $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^1 \times G$, 以 $x = \varphi(t,\tau,\xi)$ 表示 (E) 满足初值条件 $x(\tau) = \xi$ 的饱和解. 若 $x = \varphi(t,\tau,\xi_0)$ 在有限区间 $\tau \le t \le T$ 上有定义，则根据第四章 §6 定理 6.1, 当 ξ 充分靠近 ξ_0 时， $\varphi(t,\tau,\xi)$ 也在 $\tau \le t \le T$ 上有定义，并且对 t,ξ 是连续的，因而对 $\tau \le t \le T$ 一致地有

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \varphi(t,\tau,\xi) = \varphi(t,\tau,\xi_0),$$

即对任给的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta > 0$, 使得只要 $|\xi - \xi_0| < \delta$, 就有

$$|\varphi(t,\tau,\xi) - \varphi(t,\tau,\xi_0)| < \varepsilon, \quad \tau \le t \le T.$$

然而如果将有限区间 $\tau \le t \le T$ 换成无限区间 $t \ge \tau$, 情况就大不相同了，这时初值的微小变化有可能引起解的巨大变化.

例 1.1 初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x, \quad x(\tau) = \xi$$

的饱和解为

$$\varphi(t,\tau,\xi) \equiv \xi e^{t-\tau}.$$

它对所有 $t \ge \tau$ 有定义. 因为 $\varphi(t,\tau,0) \equiv 0$, 所以 $|\varphi(t,\tau,\xi) - \varphi(t,\tau,0)| = |\xi| e^{t-\tau}$, 它在无限区间 $t \ge \tau$ 上是无界的，不论 $|\xi|$ 多小，只要它不为零.

研究解在无限区间上对初值的连续性, 便导致李雅普诺夫意义下的稳定性问题.

假设解 $x = \varphi(t,\tau,\xi_0)$ 于 $t \ge \tau$ 上有定义. 如果对任给的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta > 0$, 使得只要 $|\xi - \xi_0| < \delta$ 时，解 $x = \varphi(t,\tau,\xi)$ 就在 $t \ge \tau$ 上有定义，且成立

$$|\varphi(t,\tau,\xi) - \varphi(t,\tau,\xi_0)| < \varepsilon, \quad t \ge \tau,$$

则称解 $x = \varphi(t,\tau,\xi_0)$(在李雅普诺夫意义下) 是 **稳定** 的. 否则, 称解 $x = \varphi(t,\tau,\xi_0)$ 是 **不稳定** 的. 如果 $x = \varphi(t,\tau,\xi_0)$ 是稳定的, 而且存在 $\delta_0 > 0$, 使得只要 $|\xi - \xi_0| \le \delta_0$, 就有

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi(t,\tau,\xi) - \varphi(t,\tau,\xi_0)) = 0,$$

则称解 $x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$(在李雅普诺夫意义下) 是 **渐近稳定** 的. 如果 $G=\mathbb{R}^n$, 且在渐近稳定的定义中 δ_0 可取 $+\infty$, 则称解 $x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$ 是 **全局渐近稳定** 的.

注 1.1 如果解 $x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$ 于 $t\leq\tau$ 上有定义，则也可以引出负向稳定性的概念. 但是在一般情况下，我们只考虑正向稳定性.

习　题

1. 试对稳定性，全局渐近稳定性以及负向稳定性，负向全局渐近稳定性等概念各举一微分方程实例.

2. 设 $A:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^{n\times n}, f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是连续的函数. 考虑线性微分方程

$$x'=A(t)x+f(t),\quad t\in[0,+\infty).$$

设 $\Phi(t)$ 是此微分方程对应的齐次方程的一个基本解矩阵. 证明: 若 $\Phi(t)$ 于 $[0,+\infty)$ 有界，则该微分方程的每一解都是稳定的.

3. 试举一线性微分方程，其任何两条解曲线当 $t\to+\infty$ 时都充分接近，但都是无界的.

1.2　按第一近似决定稳定性

若作未知函数的变换:

$$x=y+\varphi(t,\tau,\xi_0),$$

则方程组 (E) 便化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t,y+\varphi(t,\tau,\xi_0))-f(t,\varphi(t,\tau,\xi_0)).$$

(E) 的解 $x=\varphi(t,\tau,\xi_0)$ 对应于上述方程组的零解 $y=0$. 因此我们不妨就设 (E) 有零解 $x=0$, 而且在适当的可微性假设下，(E) 可改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+R(t,x),\tag{1.1}$$

其中 $R(t,x)$ 是 $f(t,x)$ 关于 x 的展开式中所有高于一次的项的总和. 齐次线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x\tag{1.2}$$

称为 (1.1) 的 **第一近似方程组**.

基于这种背景，我们假设 $A(t)$ 于 $t \geq \tau$ 上连续， $R(t,x)$ 于 $t \geq \tau, |x| < H$ 上连续，局部地满足李氏条件， $R(t,0) \equiv 0$, 且对 $t \geq \tau$ 一致地有

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{R(t,x)}{|x|} = 0. \tag{1.3}$$

我们先讨论如何判定 (1.2) 零解的稳定性.

定理 1.1 *设 $\Phi(t)$ 是方程组 (1.2) 的一个基本解矩阵. 方程组 (1.2) 的零解*

1) 是稳定的，当且仅当 $\Phi(t)$ 于 $t \geq 0$ 上有界；

2) 是渐近稳定 (实际上是全局渐近稳定) 的，当且仅当

$$\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = 0.$$

定理 1.2 *当 $A(t)$ 是常矩阵 A 时，方程组 (1.2) 的零解*

1) 是渐近稳定 (也是全局渐近稳定) 的，当且仅当 A 的全部特征根都有负的实部；

2) 是稳定的，当且仅当 A 的全部特征根的实部是非正的，并且那些实部为零的特征根对应的约当小块都是一阶的；

3) 是不稳定的，当且仅当 A 的特征根中至少有一个实部为正，或者至少有一个实部为零，而它所对应的约当小块是高于一阶的.

这两个定理容易从第二章和第三章的通解结构定理推出.

方程组 (1.1) 的零解稳定性能不能由其第一近似方程组 (1.2) 的零解稳定性决定呢？人们曾对此并不怀疑. 李雅普诺夫第一个指出，在一般情形下，对上述问题的回答是否定的. 同时他也正面肯定了在很广泛的条件下， (1.1) 的零解的稳定性确实能够由其第一近似 (1.2) 来决定.

定理 1.3 *设 $A(t)$ 是常矩阵 A.*

1) 若 A 的全部特征根都具有负的实部，则方程组 (1.1) 的零解是渐近稳定的；

2) 若 A 的特征根中至少有一个具有正的实部，则方程组 (1.1) 的零解是不稳定的.

证明 下面证明结论 1), 结论 2) 的证明可参看 [7] 第 13 章定理 1.2. 证明分三步：

1. 把 (1.1) 的解 $x = \varphi(t,\tau,\xi)$ 简记为 $\varphi(t)$. 应用第二章 §4 常数变易公式，在 $x = \varphi(t)$ 的定义区间上，

$$\varphi(t) \equiv e^{(t-\tau)A}\xi + \int_\tau^t e^{(t-s)A} R(s,\varphi(s))\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

由于 A 的全部特征根实部为负，因此存在正数 K 和 ρ, 使得当 $t \geq \tau$ 时有

$$|e^{(t-\tau)A}| \leq Ke^{-\rho(t-\tau)}. \tag{1.5}$$

由条件 (1.3) 知，存在正数 δ, 使得当 $|x| \leq \delta, t \geq \tau$ 时有

$$|R(t,x)| \leq \frac{\rho}{2K}|x|. \tag{1.6}$$

设 $|\xi| \leq \frac{\delta}{K+1}$. 则当 $t \geq \tau$, 而 $t-\tau$ 充分小时， $x = \varphi(t)$ 停留在 $|x| < \delta$ 中. 假设使 $x = \varphi(t)$ 停留在 $|x| < \delta$ 中的右行最大存在区间为 $\tau \leq t < t_1$. 则当 $t \in [\tau, t_1)$ 时，利用 (1.5),(1.6), 由 (1.4) 可得

$$|\varphi(t)|e^{\rho(t-\tau)} \leq K|\xi| + \frac{\rho}{2}\int_\tau^t |\varphi(s)|e^{\rho(s-\tau)}\mathrm{d}s.$$

2. 应用格龙瓦尔不等式 (见第四章 §7 引理 7.1), 由此推出,

$$|\varphi(t)| \leq K|\xi|e^{-\rho(t-\tau)/2}, \quad t \in [\tau, t_1). \tag{1.7}$$

3. 应用延展定理，由 (1.7) 知，必有 $t_1 = +\infty$. 再由 (1.7) 及渐近稳定的定义即知结论 1) 成立. □

为了应用定理 1.3, 人们需要考察矩阵 A 的特征根的实部. 下述的结果常被使用 (见 [27]).

命题 1.1 设

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

是一实系数多项式. 记 $D_1 = a_1$, 和

$$D_k = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{pmatrix}, \quad k = 2, \cdots, n,$$

其中 $a_i = 0, i > n$. 那么， $P(\lambda) = 0$ 所有根的实部均是负的，当且仅当 $D_k > 0, k = 1, \cdots, n$, 并且 $a_i > 0, i = 1, \cdots, n$.

在所谓 **临界情形**, 即 A 的特征根中没有实部为正但有实部为零的情形，(1.1) 的零解的稳定性不能应用定理 1.3 来判定. 这时 (1.1) 的零解的稳定性，视具体情况而定.

例 1.2 讨论方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + \sigma(x^3 + xy^2), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \sigma(x^2 y + y^3) \end{cases}$$

零解的稳定性，其中 σ 是常数，取值 $-1, 0$ 和 1.

容易算出它的第一近似方程组系数矩阵的特征根是 $\pm\mathbf{i}$, 因此定理 1.3 不能用. 但是容易看出，对上述方程组的任何解 $x = x(t), y = y(t)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2(t) + y^2(t)) = 2\sigma(x^2(t) + y^2(t))^2.$$

若 $x = x(t), y = y(t)$ 满足初值条件 $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, 则由上式可解出：

$$x^2(t) + y^2(t) = \frac{x_0^2 + y_0^2}{1 - 2\sigma(x_0^2 + y_0^2)t}.$$

由此看出：当 $\sigma = -1$ 时，零解全局渐近稳定；当 $\sigma = 0$ 时，零解稳定；当 $\sigma = 1$ 时，零解不稳定.

习　题

1. 设 $A : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 是连续的函数. 考虑线性微分方程

$$x' = A(t)x, \quad t \in [0, +\infty).$$

设 $\Phi(t)$ 是此微分方程的一个基本解矩阵. 证明：若

$$\limsup_{t\in[0,+\infty)} \int_0^t \mathrm{tr}A(s)\mathrm{d}s = +\infty,$$

则该微分方程的零解不是稳定的.

2. 说明下列微分方程的零解是不稳定的.

(1)　$x''' + 2x'' + x' - x = 0$;

(2)　$x^{(4)} - 3x'' + 7x' - 2x = 0$;

(3)　$x^{(100)} + x^{(10)} - 2x = 0$.

3. 利用命题 1.1 给出三阶纯量微分方程

$$x''' = a_1 x'' + a_2 x' + a_3 x$$

的零解全局渐近稳定的充要条件.

1.3 李雅普诺夫第二方法

为了处理稳定性问题，李雅普诺夫创立了两种著名的方法，即所谓第一方法和第二方法. 第一方法要利用微分方程的级数解，在他之后没有得到多大发展. 第二方法又称为直接方法，是寻求某个与所考虑微分方程有关的所谓李雅普诺夫函数，根据这种函数的特性直接去判断解的稳定性. 例 1.2 中的 x^2+y^2 正是这样的函数.

例 1.3 讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sigma x-y^2,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sigma y+xy \tag{1.8}$$

零解的稳定性，其中 σ 是常数，取值 $-1,0$ 和 1.

解 取函数

$$V(x,y)=x^2+y^2. \tag{1.9}$$

记 (1.8) 满足初值条件 $x(\tau)=x_0, y(\tau)=y_0$ 的解为 $x=x(t), y=y(t)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(x(t),y(t))=2\sigma V(x(t),y(t)).$$

解之，得

$$V(x(t),y(t))=x^2(t)+y^2(t)=(x_0^2+y_0^2)e^{2\sigma(t-\tau)}.$$

由此可见， (1.8) 的零解当 $\sigma=-1$ 时是全局渐近稳定的；当 $\sigma=0$ 时是稳定的；当 $\sigma=1$ 时是不稳定的. □

这例中的函数 (1.9) 也正是方程组 (1.8) 的李雅普诺夫函数.

现在一般地介绍李雅普诺夫第二方法. 为简单计，我们只考虑右端不显含自变量 t 的方程组 (E)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x), \tag*{$(E)_a$}$$

其中 x 和 $f(x)$ 都是 n 维列向量. 这种方程组称为 **自治方程组**, 或称为 **驻定系统**.

假设 $f(0)=0$(因而 $(E)_a$ 有零解), $f(x)$ 于域

$$G:\quad |x|<H$$

上连续，且局部地满足李氏条件.

设 $V(x)$ 为定义在

$$|x|\le h<H \tag{1.10}$$

上的连续可微纯量函数．如果

$$V(0)=0,\quad V(x)>0(V(x)<0),\quad x\neq 0,$$

则称 $V(x)$ 是 (1.10) 上的 **定正** (**定负**) **函数**; 如果

$$V(0)=0,\quad V(x)\geq 0(V(x)\leq 0),$$

则称 $V(x)$ 是 (1.10) 上的 **常正** (**常负**) **函数**.

引进记号

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(E)_a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}f_i(x),\tag{1.11}$$

其中 $f_i(x)$ 是 $f(x)$ 的第 i 个分量．这通常被称为函数 $V(x)$ 沿着方程 $(\mathrm{E})_a$ 的方向导数.

下面的结果就是经典的李雅普诺夫稳定性定理, 它巧妙地将微分方程解的稳定性的判定与构造具有某种性质的纯量函数 (习惯上称为 **李雅普诺夫函数**) 联系起来.

定理 1.4 *设 $V(x)$ 是 (1.10) 上的定正函数.*

1) 如果 (1.11) 是常负函数, 则 $(E)_a$ 的零解是稳定的;

2) 如果 (1.11) 是定负函数, 则 $(E)_a$ 的零解是渐近稳定的;

3) 如果 (1.11) 是定正函数, 则 $(E)_a$ 的零解是不稳定的.

证明　先证 1). 任给 $\varepsilon>0(\varepsilon\leq h)$. 记 $r_\varepsilon=\min\limits_{\varepsilon\leq|x|\leq h}V(x)$. 根据 $V(x)$ 的定正性必有 $r_\varepsilon>0$. 由 $V(x)$ 连续性和 $V(0)=0$ 知, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $|x|<\delta$ 时, $V(x)<r_\varepsilon$. 设 $|\xi|<\delta(\varepsilon), x=\varphi(t,\tau,\xi)$ 在域 (1.10) 上的右行最大存在区间为 $\tau\leq t<t_1$. 因为 (1.11) 是常负的, 故当 $\tau\leq t<t_1$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(\varphi(t,\tau,\xi))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}(\varphi(t,\tau,\xi))f_i(\varphi(t,\tau,\xi))\leq 0.$$

从而

$$V(\varphi(t,\tau,\xi))\leq V(\xi)<r_\varepsilon,\quad \tau\leq t<t_1.$$

由此, 注意到记号 r_ε 的定义就知

$$|\varphi(t,\tau,\xi)|<\varepsilon,\quad \tau\leq t<t_1.$$

根据延展定理, 上式包含 $t_1=\infty$. 这就证明了 1).

再证 2). 按假设, (1.11) 是定负的, 自然更是常负的, 故由 1) 知, $(E)_a$ 的零解是稳定的. 还要证明的是, 存在 $\delta_0>0$, 使得当 $|\xi|<\delta_0$ 时,

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,\tau,\xi)=0.\tag{1.12}$$

取 $\delta_0>0$, 使得当 $|\xi|<\delta_0, t\geq\tau$ 时, $|\varphi(t,\tau,\xi)|<h$. 根据 1), 这样的 δ_0 是存在的.

由于 $\varphi(t,\tau,\xi)$ 在 $t\geq\tau$ 上有界, 必存在递增地趋于 $+\infty$ 的 t_k, 使得

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi(t_k,\tau,\xi)=\tilde{\xi}$$

存在．假如 $\tilde{\xi}\neq 0$, 则由唯一性定理知，对 $t\geq\tau$, 恒有 $\varphi(t,\tau,\xi)\neq 0$. 由于 (1.11) 是定负的，对 $t\geq\tau$, 我们有 $\frac{\mathrm{d}V(\varphi(t,\tau,\tilde{\xi}))}{\mathrm{d}t}<0$. 从而

$$V(\varphi(t,\tau,\tilde{\xi}))<V(\tilde{\xi}),\quad t>\tau. \tag{1.13}$$

另一方面，对任何 $t>\tau$, 根据 (1.11) 的定负性，当 $t_k>t$ 时有 $V(\varphi(t_k,\tau,\xi))<V(\varphi(t,\tau,\xi))$. 由此，注意到 t_k 是递增的，令 $k\to+\infty$ 取极限就得到

$$V(\tilde{\xi})<V(\varphi(t,\tau,\xi)),\quad t>\tau. \tag{1.14}$$

由于 $(E)_a$ 是自治的，根据唯一性定理，对任何 $k,\varphi(t+t_k,\tau,\xi)$ 与 $\varphi(t+\tau,\ \tau,\ \varphi(t_k,\tau,\xi))$ 必恒等 (因为二者都是 $(E)_a$ 的解，而在 $t=0$ 时取同样的初值)．特别就有 $\varphi(1+t_k,\tau,\xi)=\varphi(1+\tau,\tau,\varphi(t_k,\tau,\xi))$. 从而

$$V(\varphi(1+t_k,\tau,\xi))=V(\varphi(1+\tau,\tau,\varphi(t_k,\tau,\xi))).$$

根据 $V(x)$ 连续性和 $\varphi(t,\tau,\xi)$ 对初值的连续性，当 $k\to+\infty$ 时上式右端趋于 $V(\varphi(1+\tau,\tau,\tilde{\xi}))$. 故由 (1.13) 知，当 k 充分大时，有

$$V(\varphi(1+t_k,\tau,\xi))=V(\varphi(1+\tau,\tau,\varphi(t_k,\tau,\xi)))<V(\tilde{\xi}).$$

但这又与 (1.14) 矛盾．故必有 $\tilde{\xi}=0$.

以上我们实际上证明了，如果 $t_k\to+\infty$ 使得极限 $\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi(t_k,\tau,\xi)$ 存在，则这个极限就一定是零．这就证明了 (1.12).

最后证明 3)．用反证法．假设零解是稳定的，即对任给的 $\varepsilon>0$, 恒存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得

$$|\varphi(t,\tau,\xi)|<\varepsilon,\quad |\xi|<\delta(\varepsilon),\ t\geq\tau. \tag{1.15}$$

任取 $\xi\neq 0,|\xi|<\delta(\varepsilon)$. 由 (1.11) 的定正性，首先我们有

$$V(\varphi(t,\tau,\xi))>V(\xi)>0,\quad t>\tau.$$

从而存在 $\alpha>0$, 使得 $|\varphi(t,\tau,\xi)|\geq\alpha$. 据此，按 (1.11) 的定正性，存在 $\beta>0$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}V(\varphi(t,\tau,\xi))}{\mathrm{d}t}\geq\beta.$$

积分得

$$V(\varphi(t,\tau,\xi))>V(\varphi(t,\tau,\xi))-V(\xi)\geq\beta(t-\tau),\quad t\geq\tau.$$

由 (1.15) 知，上式左端是有界的，而右端无界．这一矛盾表明结论 3) 成立． □

当一个微分方程组的零解为稳定，渐近稳定或不稳定时，是否一定存在相应的李雅普诺夫函数？这便是著名的所谓李雅普诺夫反问题．已有研究表明：对这个问题的回答是肯定的 (如见 [34])．但是理论上存在和实际上能否具体构造出来是两回事．如何构造李雅普诺夫函数，没有一般的方法可遵循，至今仍是一个吸引人的研究课题．

例 1.4 讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(x,y)y-g(x) \tag{1.16}$$

零解的稳定性，其中 $f(x,y)$ 和 $g(x)$ 连续，且在原点 $(0,0)$ 附近 $f(x,y)\geq 0,xg(x)>0(x\neq 0)$.

解 取函数

$$V(x,y)=\frac{y^2}{2}+\int_0^x g(s)\mathrm{d}s.$$

则它在原点附近是定正的，且

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1.16)}=-f(x,y)y^2$$

是常负的，故由定理 1.4 知 (1.16) 的零解是稳定的. □

例 1.5 讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y^3,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x^3 \tag{1.17}$$

零解的稳定性.

解 取函数

$$V(x,y)=x^4+y^4.$$

则它在原点附近是定正的，且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(1.17)}\equiv 0$ 是常负的，从而 (1.17) 的零解是稳定的. 实际上，该方程组的任何解 $x=x(t),y=y(t)$ 都满足 $x^4+y^4\equiv c$, c 是某一常数. 可见零解只能是稳定的，而不可能是渐近稳定的. □

例 1.6 讨论方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2y+yz-x^3,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-xz-y^3,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-z^3 \tag{1.18}$$

零解的稳定性.

解 尝试选取函数

$$V(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2,$$

其中 $a,b,c>0$ 待定，首先使得 $V(x,y,z)$ 在原点附近是定正的. 注意到

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(1.18)}=2(2a-b)xy+2(a-b+c)xyz-2(ax^4+by^4+cz^4),$$

自然选取 a,b,c 使得 $2a-b=0,2(a-b+c)=0$. 特别我们取 $a=c=1,b=2$. 对这样选取的 a,b,c, $V(x,y,z)$ 是定正的，而 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\big|_{(1.18)}$ 是定负的，故 (1.18) 的零解是渐近稳定的. □

李雅普诺夫稳定性理论已经得到很大的发展，一些进一步的工作可参看 [34]. 这里我们顺便介绍关于零解全局渐近稳定的一个重要结果：假设 $(E)_a$ 中 $n=2$, $f(x)$ 于 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微， $f(0)=0$. 如果有

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)>0,\quad \mathrm{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)<0,\quad x\in\mathbb{R}^2,$$

则 $(E)_a$ 的零解是全局渐近稳定的，这里 $\det(\frac{\partial f}{\partial x})$ 表示 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的行列式， $\mathrm{tr}(\frac{\partial f}{\partial x})$ 表示 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的迹.

习 题

1. 用李雅普诺夫函数确定下列微分方程零解的稳定性.

(1) $x' = x - y + 2x^3,\quad y' = -x + 2y + y^3;$

(2) $x' = -4y + x^3,\quad y' = 4x + y^3;$

(3) $x' = -2y + yz,\quad y' = x - xz,\quad z' = xy;$

(4) $x' = -y - xy^2 - x^3 + z^3,\quad y' = x - y^3 + z^3,\quad z' = -xz^2 - x^2z - yz^2 - z^5.$

2. 考虑洛伦兹 (Lorenz) 系统

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = \rho x - y - xz, \\ z' = xy - \beta z, \end{cases}$$

其中 $\sigma, \rho, \beta > 0$. 证明：当 $\rho < 1$ 时，原点 $(0,0,0)$ 是全局渐近稳定的.

提示：考虑李雅普诺夫函数 $V(x,y,z) = \rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$.

3. 考虑具有阻尼的单摆方程

$$x' = y,\quad y' = -y - \sin x$$

的零解 $(0,0)$ 的稳定性. 尝试取不同的李雅普诺夫函数 $V_1(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x$ 和 $V_2(x,y) = y^2 + (x+y)^2 + 4(1-\cos x)$, 并比较所得到的结论.