§2　一般定性理论的概念

2.1　相空间，轨线，动力系统

考虑自治方程组 $(E)_a$. 假设 $f(x)$ 于 $\mathbb{R}^n$ 上连续可微.

称 x 取值的空间 $\mathbb{R}^n$ 为 **相空间**. 如果把 x 看成质点的位置， t 看成时间，$(E)_a$ 看成质点的运动方程，则方程组 $(E)_a$ 在相空间 $\mathbb{R}^n$ 的每一点 x 处给定了一个质点运动的速度向量：

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)), \tag{2.1}$$

因而在相空间 $\mathbb{R}^n$ 中定义了一个速度场. $(E)_a$ 过点 $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ 的解 $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ 是通过相空间中点 ξ 的与速度场 (2.1) 相吻合的一条光滑曲线 (称为 **轨线**) 的参数表示，其中 t 就是参数，且当 $t = \tau$ 时对应于轨线上的点 ξ. 随着 t 的推移，在 “动力” $f(x)$ 的作用下，质点在相空间中沿着轨线运动 (因此，有时也称解为 **运动**), 通常在轨线上用箭头标明 t 增大时质点的运动方向. 我们的任务就是从速度场 (2.1) 出发，力求给出 $(E)_a$ 的所有轨线的一种全面描述 (称为 **相图**). 因此，定性理论也称为 **几何理论**.

对自治方程组 $(E)_a$, 有下述三条重要性质.

1. 积分曲线的平移不变性. 这是指对 $(E)_a$ 的任一解 $x = \varphi(t)$ 和任意常数 c, $x = \varphi(t + c)$ 仍是 $(E)_a$ 的解.

2. 轨线的唯一性. 这是说对相空间的每一点， $(E)_a$ 只有一条轨线通过.

3. 群性质. 即若把 $(E)_a$ 的解 $x = \varphi(t, 0, \xi)$ 简记为 $x = \varphi(t, \xi)$, 则

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, \xi)) = \varphi(t_1 + t_2, \xi).$$

性质 1 可以直接代入 $(E)_a$ 验证. 性质 3 可以由性质 1 和初值问题解的唯一性得到，因为 $x = \varphi(t, \varphi(t_1, \xi))$ 和 $x = \varphi(t + t_1, \xi)$ 是 $(E)_a$ 满足同一初值条件 $x(0) = \varphi(t_1, \xi)$ 的解. 下面证明性质 2.

设对点 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 方程组 $(E)_a$ 有两条轨线通过. 假定它们对应于解 $x = \varphi(t)$ 和 $x = \psi(t)$, 且有 τ_1 和 τ_2, $\tau_1 \neq \tau_2$, 使得

$$\varphi(\tau_1) = \psi(\tau_2) = \xi.$$

则由性质 1 和初值问题解的唯一性知

$$\varphi(t) \equiv \psi(t - \tau_1 + \tau_2). \tag{2.2}$$

由此可知 $x = \varphi(t)$ 和 $x = \psi(t)$ 代表同一条轨线. 这是因为若 x_0 是轨线 $x = \varphi(t)$ 上的一点，即对某一个 t_1 有 $\varphi(t_1) = x_0$, 则 x_0 也处于轨线 $x = \psi(t)$ 上 (因为由

(2.2) 知， $x_0=\varphi(t_1)=\psi(t_1-\tau_1+\tau_2)$); 反之，若 x_0 是轨线 $x=\psi(t)$ 上的一点，即存在 t_2 使得 $\psi(t_2)=x_0$, 则 x_0 也处于轨线 $x=\varphi(t)$ 上 (因为由 (2.2) 知, $x_0=\psi(t_2)=\varphi(t_2+\tau_1-\tau_2)$). 于是性质 2 得证.

由于

$$\varphi(t,\tau,\xi)\equiv\varphi(t-\tau,0,\xi),$$

因此对方程组 $(E)_a$, 不失一般性，我们可以只考虑当 $\tau=0$ 时从 ξ 出发的轨线 $x=\varphi(t,\xi)=\varphi(t,0,\xi)$.

一般来说，方程组 $(E)_a$ 的解 $x=\varphi(t,\xi)$ 未必于整个 t 轴上有定义. 但由延展定理知，方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{f(x)}{1+|f(x)|}$$

的每一个解却总是在整个 t 轴上有定义的，而且它的轨线和 $(E)_a$ 相应的轨线却是相同的. 所以我们不妨设 $(E)_a$ 的解 $x=\varphi(t,\xi)$ 于整个 t 轴存在.

对每一固定的 t, $\varphi(t,\xi)$ 是把点 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 变到点 $\varphi(t,\xi)\in\mathbb{R}^n$ 的一个点变换. 因此， $F=\{\varphi(t,\xi):t\in\mathbb{R}^1\}$ 是一个含单参数 t 的变换集合，也称为 $(E)_a$ 的 **流**. 它具有性质：

1. $\varphi(t,\xi)$ 是 (t,ξ) 的连续函数;
2. $\varphi(0,\xi)=\xi$;
3. $\varphi(t,\varphi(s,\xi))=\varphi(t+s,\xi)$.

如果把性质 3 视作对 F 中元素定义的乘法，则这种乘法是 F 上的代数运算，且满足结合律. $\varphi(0,\xi)$ 是 F 中的单位元素，因为

$$\varphi(t,\varphi(0,\xi))=\varphi(t,\xi)=\varphi(0,\varphi(t,\xi)).$$

此外， F 中任一元素 $\varphi(t,\xi)$ 都有逆元素 $\varphi(-t,\xi)$:

$$\varphi(t,\varphi(-t,\xi))=\varphi(0,\xi)=\varphi(-t,\varphi(t,\xi)).$$

因此 F 构成了一个乘法群 (所以性质 3 称为群性质), 称为 **动力系统**. 有时也把方程组 $(E)_a$ 称为 **动力系统**. 这个概念是由伯克霍夫 (Birkhoff, 1884-1944) 引入的, 它形象地描述了微分方程的力学背景. 而脱离开微分方程的这种具有性质 1-3 的单参数连续变换群，称为一个 **抽象动力系统** 或 **拓扑动力系统**. 如果 $\varphi(t,x)$ 对 t 还是可微的，则称它为 **微分动力系统**. 这是微分方程理论发展的一个主要研究方向.

2.2 奇点，闭轨，极限集

若 $f(x_0)=0$, 则在 x_0 处 (2.1) 是零向量，方向无法确定，这种点称为方程组 $(E)_a$ 的 **奇点**, 有时从速度为零这一角度而称它为 **平衡点**. 由于 $f(x_0)=0, x=x_0$ 显然是方程组 $(E)_a$ 的一个解，称为 **定常解**.

若存在正数 T, 使得 $\varphi(T,\xi)=\xi$, 则称 $x=\varphi(t,\xi)$ 是 $(E)_a$ 的周期解，以 T 为周期，因为这时必有

$$\varphi(t+T,\xi)=\varphi(t,\xi),\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

不是定常解的周期解所对应的轨线称为 **闭轨**.

奇点和闭轨在动力系统理论的研究中，起着特殊重要的作用. 像太阳系中九大行星运行的轨道，某些彗星 (如哈雷彗星) 的轨道，钟表中的单摆的振动，心脏的跳动等等都可以看成闭轨.

一条闭轨 Γ 称之为 **稳定** 的，如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在 Γ 的一个邻域 U, 使得对每一 $\xi\in U$, 有 $\mathrm{d}(\varphi(t,\xi),\Gamma)<\varepsilon, t\geq 0$; 否则，闭轨 Γ 就称为 **不稳定** 的. 闭轨 Γ 称之为 **渐近稳定** 的，如果存在 Γ 的一个邻域 U_0, 使得对每一 $\xi\in U_0$, 有 $\mathrm{d}(\varphi(t,\xi),\Gamma)\to 0,\ t\to+\infty$; 这里， $\mathrm{d}(x,\Gamma)$ 表示点 x 到 Γ 的距离.

应该强调指出的是，这里所说的稳定不同于李雅普诺夫意义下的稳定，这种稳定性一般称为 **轨线稳定性**.

为了确定 $(E)_a$ 所有轨线的分布状况，我们必须考察每条轨线在 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时的渐近性态.

假设

$$x=\varphi(t,\xi) \tag{2.3}$$

在正半轴 $t\geq 0$ 上有定义. 如果存在点 $y_0\in\mathbb{R}^n$ 及趋于 $+\infty$ 的点列 $\{t_k\}$ 使得

$$\lim_{k\to+\infty}\varphi(t_k,\xi)=y_0, \tag{2.4}$$

则说 y_0 是轨线 (2.3) 的 ω-**极限点**.(2.3) 的 ω- 极限点全体，称为 (2.3) 的 ω-**极限集**, 记为 $\Omega^+(\xi)$. 同样，如果 (2.3) 在负半轴 $t\leq 0$ 上有定义，且 $\{t_k\}$ 是趋于 $-\infty$ 的点列，则使 (2.4) 成立的点 y_0 称为轨线 (2.3) 的 α-**极限点**. (2.3) 的 α- 极限点全体，称为 (2.3) 的 α-**极限集**, 记为 $\Omega^-(\xi)$. 而 $\Omega^-(\xi)\bigcup\Omega^+(\xi)$ 称为 (2.3) 的 **极限集**, 记为 $\Omega(\xi)$.

可以证明： $\Omega^{\pm}(\xi)$ 和 $\Omega(\xi)$ 都是闭集；若 $p\in\Omega^{\pm}(\xi)$, 则 $\varphi(t,p)\in\Omega^{\pm}(\xi)$, 且 $\Omega^{\pm}(p)\subset\Omega^{\pm}(\xi)$; 如果 $\varphi(t,\xi)$ 在 $t\geq 0(t\leq 0)$ 上有界，则 $\Omega^+(\xi)(\Omega^-(\xi))$ 是非空的，连通的有界闭集.

一个集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 称为流 $\{\varphi(t,\xi):t\in\mathbb{R}^1\}$ 的 **正 (负) 不变集**, 如果 $\varphi(t,S)\subset S, t\geq 0(t\leq 0)$; 如果 S 同时是正不变的和负不变的, 则称为流 $\{\varphi(t,\xi):t\in\mathbb{R}^1\}$ 的 **不变集**. 一个集合 $S\subset\mathbb{R}^n$ 称为 $(E)_a$ 的 **最小集**, 如果它是非空的，闭的和不变的，并且没有 S 的真子集具有这三条性质. 一个闭不变集 S 称为流 $\{\varphi(t,\xi):t\in\mathbb{R}^1\}$ 的 **吸引集**, 如果存在 S 的一个邻域 U, 使得对所有 $\xi\in U$ 和

$t \geq 0$, $\varphi(t,\xi) \in U$, 并且 $\varphi(t,\xi) \to S$, 即 $\mathrm{d}(\varphi(t,\xi),S) \to 0$, $t \to +\infty$; 如果吸引集 S 包含一条稠密的轨线，则称之为 **吸引子**.

从定义可以直接看出， $(E)_a$ 的每单个奇点和每单个闭轨都是最小集.

我们已经给出了定常解和周期解等概念. 现在我们再引进两类重要的解. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $L > 0$, 使得轨线 $\gamma : x = \varphi(t,\xi), t \geq 0$ 包含在它对应于长为 L 的任意时间区间的轨线段的 ε 邻域中，则轨线 γ 称为 **(伯克霍夫意义下) 回复** 的, 点 ξ 称为流 $\{\varphi(t,\xi) : t \in \mathbb{R}^1\}$ 的 **回复点**. 全体回复点构成的集合 $\mathcal{R}$ 称之为流 $\{\varphi(t,\xi) : t \in \mathbb{R}^1\}$ 的 **回复点集**. 可以证明 (见 [22]): 若 S 是 $(E)_a$ 的最小集，并且是有界的，则其中每一条轨线都是回复的. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $l = l(\varepsilon) > 0$, 使得在每个长度为 l 的区间上，存在点 τ, 使得 $|\varphi(t+\tau,\xi) - \varphi(t,\xi)| < \varepsilon, t \in \mathbb{R}^1$, 则轨线 $\varphi(t,x)$ 称为 **概周期**(或 **几乎周期**) 的，点 ξ 称为流 $\{\varphi(t,\xi) : t \in \mathbb{R}^1\}$ 的 **概周期点**.

显然，若轨线 γ 是周期的，则它必是概周期的；若 γ 是概周期的，则它必是回复的. 现实世界中有许多运动规律和现象可以用上述两类解来描绘. 例如，有些彗星经常回到地球附近，但是回归的时间并不相同，它的轨线就可以看作是回复的；一年四季气候的变化可以看成是概周期的.

对于平面动力系统的研究，一般有 ω- 极限集和 α- 极限集的概念就已经够了. 但是对于更高维的动力系统来说, 则还需要引进更一般的概念, 如游荡点集, 非游荡点集和链回归点集等等.

一个点 x_0 称之为流 $\{\varphi(t,\xi) : t \in \mathbb{R}^1\}$ 的 **非游荡点**, 如果对任意 x_0 的邻域 U 和任意的 $T > 0$, 存在 $t > T$ 使得

$$\varphi(t,U) \bigcap U \neq \emptyset.$$

全体非游荡点构成的集合 Ω 称之为流 $\{\varphi(t,\xi) : t \in \mathbb{R}^1\}$ 的 **非游荡点集**; 余下的点组成的集合称为 **游荡点集**, 其中的点称为 **游荡点**. 显然奇点和闭轨中的点都是非游荡点. 流 $\{\varphi(t,\xi) : t \in \mathbb{R}^1\}$ 的一个从 x 到 y 的长度为 T 的 ε-**链** 是指一个序列 $\{x = x_0, \cdots, x_k = y;\ t_1, \cdots,\ t_k \geq 1\}$, 它具有性质

$$\mathrm{d}(\varphi(t_j, x_{j-1}), x_j) < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \cdots, k, \quad t_1 + \cdots + t_k = T.$$

而流 $\{\varphi(t,\xi) : t \in \mathbb{R}^1\}$ 的 **链回归集** 则是指集合

$$\mathcal{CR} = \{x:\ \text{对任何}\ \varepsilon,\ \text{恒存在从}\ x\ \text{到}\ x\ \text{的}\ \varepsilon\text{- 链}\}.$$

1978 年, 康雷 (Conley, 1933-1984) 证明了下述动力系统的基本定理 (见 [8]):

定理 2.1 *存在李雅普诺夫函数 $V(x)$ 使得在链回归集 $\mathcal{CR}$ 的外部， $V(\varphi(t,\xi))$ 是严格递减的.*

这个重要结果表明：动力系统的轨线在它的链回归集的外部都是简单的，要么正向趋于链回归集，要么负向趋于链回归集，因而系统轨线的复杂性只可能发生在链回归集上.

习 题

1. 证明如果 S 是流 $\varphi(t,x)$ 的不变集，则 $\varphi(t,S)=S, t\in\mathbb{R}^1$.

2. 证明集合 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 是系统

$$x'=-x,\quad y'=x^2+y$$

的不变集.

3. 证明集合 $[-1,1]\times\{0\}$ 是系统

$$x'=x-x^3,\quad y'=-y$$

的吸引集. 这个集合是吸引子吗？每个集合 $(0,+\infty)\times\{0\}$, $[0,+\infty)\times\{0\}$, $(-1,+\infty)\times\{0\}$, $[-1,+\infty)\times\{0\}$, $(-\infty,+\infty)\times\{0\}$ 是该系统的吸引集吗？

4. 设 γ 是 $(E)_a$ 的一闭轨. 证明：

$$\gamma=\Omega^-(x_0)=\Omega^+(x_0)=\Omega(x_0),$$

其中 $x_0\in\gamma$.

5. 证明：每条概周期轨线都是有界的.

6. 证明：对流 $\varphi(t,x)$, 有

$$\mathcal{R}\subset\Omega^+\subset\Omega\subset\mathcal{CR}.$$

7. 设 $x(t)$ 是 $(E)_a$ 的有界解，其轨线 γ 孤立，即存在 $\delta>0$, 使得于 γ 的闭 δ 邻域，除了轨线 γ 外，$(E)_a$ 再无其它轨线完全位于其中. 证明：

1) $\gamma=\Omega^-(x(0))=\Omega^+(x(0))$;

2) γ 是闭轨.