

## §3 平面动力系统

考虑平面动力系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad (3.1)$$

其中  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  于平面  $\mathbb{R}^2$  上连续可微.

我们将对系统的奇点, 闭轨附近轨线的性态及其全局结构给出一个简要的考察. 由于平面本身的特殊性, 使得平面动力系统的轨线分布比较单纯, 因而相应的理论也比较完善.

## 3.1 奇点

先研究 (3.1) 的奇点的性质. 不失一般性, 我们只考虑奇点是坐标原点的情形. 这是因为经简单变换, (3.1) 的任一奇点都能化成原点, 而后者是另一自治系统的奇点. 假设 (3.1) 在点  $(0, 0)$  附近能写成如下形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R(x, y), \quad (3.2)$$

其中  $A$  是二阶实数矩阵,  $R(x, y)$  于点  $(0, 0)$  附近连续可微,  $R(0, 0) = 0$ , 且

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(x, y)}{r} = 0,$$

这里  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

如果  $\det A \neq 0$ , 则称  $(0, 0)$  是 (3.2) 的 **初等奇点**; 否则称它为 **高阶奇点**. 容易想到在奇点  $(0, 0)$  附近, (3.2) 的轨线分布应该和它的第一近似方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

的相似. 在  $(0, 0)$  是初等奇点的情形, 情况基本上是这样 (见后面的定理 3.2). 下面我们在假设  $\det A \neq 0$  的前提下, 详细地来分析 (3.3) 的轨线分布.

根据矩阵化标准形的定理 (见第三章 §2 习题), 经一非奇异线性变换, 可将 (3.3) 化成另一方程组, 其系数矩阵为实标准形. 记  $p = -\operatorname{tr} A, q = \det A$ . 对于初等奇点, 即当  $q \neq 0$  时, 不外下列几种情形:

1. 若  $q > 0, p^2 - 4q = 0$ , 则  $A$  有二重实特征根  $\lambda$ . 此时的实标准形为  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  (约当块是一阶的) 或  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$  (约当块是二阶的);

2. 若  $q > 0, p^2 - 4q > 0$ , 则  $A$  有两个相异实特征根  $\lambda, \mu$ , 且  $\lambda\mu > 0$ . 此时的实标准形为  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ;

3. 若  $q < 0$ , 则  $A$  有两个相异实特征根  $\lambda, \mu$ , 且  $\lambda\mu < 0$ . 此时的实标准形也是  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ;

4. 若  $p \neq 0, p^2 - 4q < 0$ , 则  $A$  有两个互相共轭的复特征根  $\alpha + \beta i, \alpha - \beta i$ , 且  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ . 此时的实标准形为  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ;

5. 若  $q > 0, p = 0$ , 则  $A$  有两个纯虚特征根  $\beta i, -\beta i (\beta \neq 0)$ . 此时的实标准形为  $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ .

不妨设矩阵  $A$  已具有上述标准形之一. 下面分别加以讨论.

I.  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ . 容易得到 (3.3) 的通解

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad y = c_2 e^{\mu t}.$$

故 (3.3) 的全部轨线可表示成

$$y = c|x|^{\mu/\lambda} \text{ 和 } x = 0,$$

其中  $c_1, c_2, c$  都是任意常数. 这时又有三种情形:

1°  $\lambda = \mu$ . (3.3) 的轨线族是由原点及自原点出发但不含原点的全体射线组成的, 这时称奇点  $(0, 0)$  为 **星形结点** 或 **临界结点**. 依  $\lambda$  的符号有如图 3.1 所示的两种相图.

2°  $\lambda \neq \mu$  且  $\lambda\mu > 0$ . 当  $\frac{\mu}{\lambda} > 1$  时, (3.3) 的轨线除了  $y$  轴上的两条轨线外, 其它轨线均于原点与  $x$  轴相切; 当  $\frac{\mu}{\lambda} < 1$  时, 除了  $x$  轴上的两条轨线外, 其它轨线均于原点与  $y$  轴相切. 当  $\lambda, \mu < 0$  时, (3.3) 的零解  $(0, 0)$  是稳定的; 当  $\lambda, \mu > 0$  时, 零解  $(0, 0)$  是不稳定的. 我们称此种奇点  $(0, 0)$  为 **两向结点** 或 **正常结点**. 相图如 3.2 所示.

3°  $\lambda\mu < 0$ . 这时 (3.3) 的轨线除了在  $x$  轴上的两条和在  $y$  轴上的两条轨线外, 均以  $x$  轴和  $y$  轴为其渐近线, 这种奇点  $(0, 0)$  称为 **鞍点**. 相图如图 3.3 所示. 这时 (3.3) 的零解  $(0, 0)$  是不稳定的.

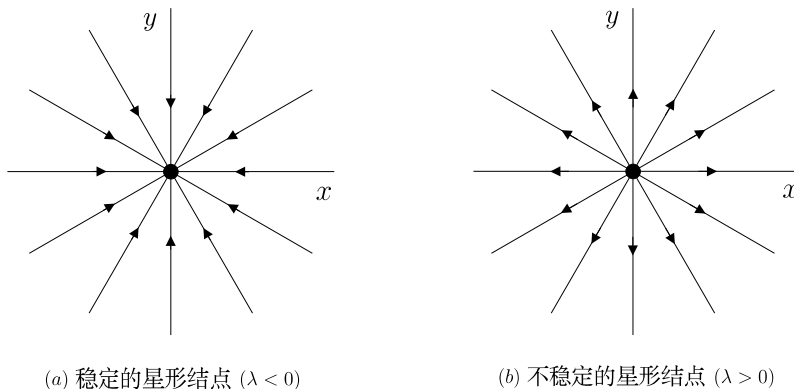


图 3.1: 星形结点

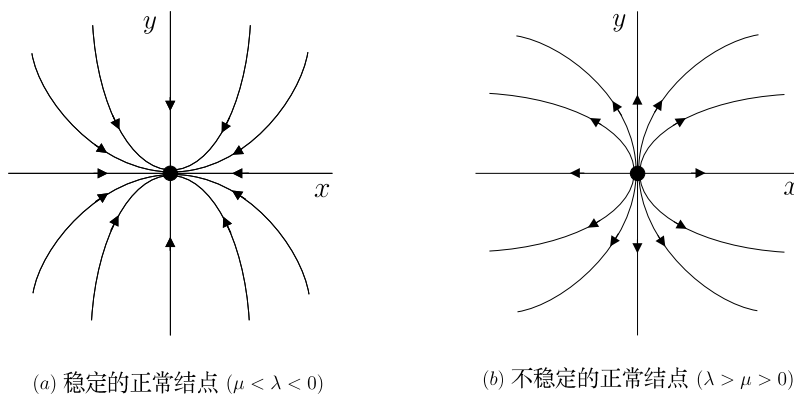


图 3.2: 正常结点

II.  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$  ( $\lambda \neq 0$ ). 这时 (3.3) 的通解为

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad y = (c_2 + c_1 t) e^{\lambda t}.$$

故 (3.3) 的全部轨线可表示成

$$y = cx + \frac{x}{\lambda} \ln|x| \quad \text{和} \quad x = 0.$$

由此知

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \begin{cases} +\infty, & \lambda < 0, \\ -\infty, & \lambda > 0. \end{cases}$$

因此, (3.3) 的每一轨线都在原点与  $y$  轴相切. 这时称  $(0, 0)$  为 **单向结点** 或 **退化结点**. 依  $\lambda$  的符号有如图 3.4 所示的两种相图.

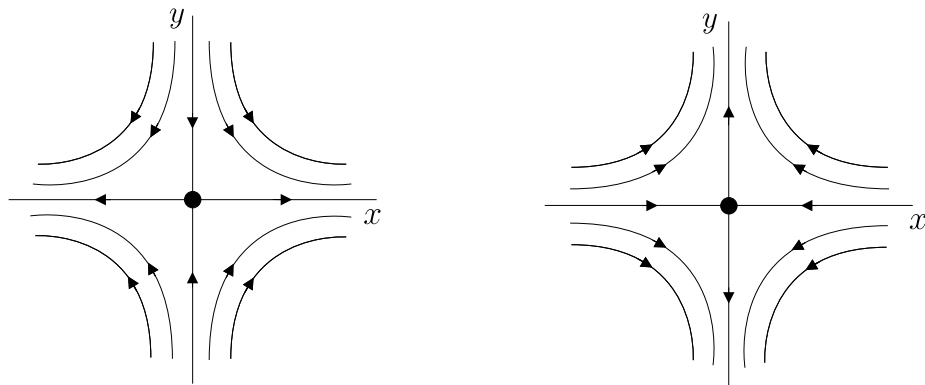


图 3.3: 鞍点

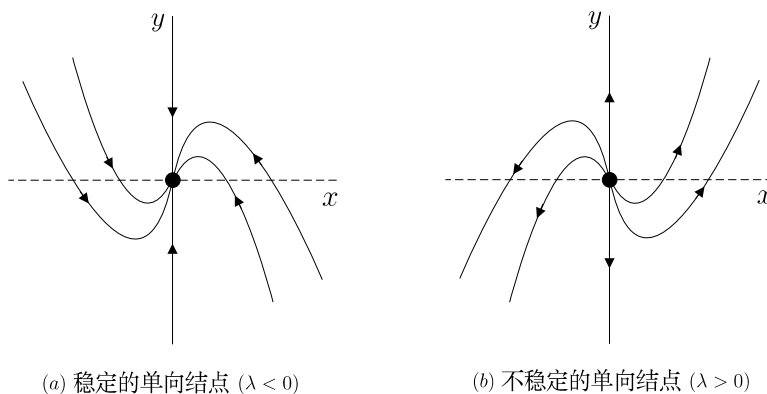
(a) 稳定的单向结点 ( $\lambda < 0$ )(b) 不稳定的单向结点 ( $\lambda > 0$ )

图 3.4: 单向结点

III.  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ , 即  $A$  有一对共轭复特征根. 令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ .

则 (3.3) 化为

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \beta, \quad (3.4)$$

其通解为

$$r = c_1 e^{\alpha t}, \quad \theta = \beta t + c_2.$$

从而 (3.3) 的全部轨线的极坐标形式为

$$r(t) = c e^{\alpha \theta / \beta}, \quad (3.5)$$

其中  $c \geq 0$  为任意常数. 易见, 当  $c > 0$  时, 曲线族 (3.5) 都不通过点  $(0, 0)$ . 由 (3.4) 的第二式知,  $\beta$  的符号决定了轨线的盘旋方向: 确切地说,  $\beta > 0$  时, 沿

逆时针方向;  $\beta < 0$  时, 沿顺时针方向. 相图依  $\alpha$  的不同符号分为三种:  $\alpha < 0$  时, (3.5) 是螺线族, 当  $t \rightarrow +\infty$  时盘旋地趋近于点  $(0, 0)$ , 因而是稳定的, 这时奇点  $(0, 0)$  称为 **稳定焦点**;  $\alpha > 0$  时, (3.5) 仍为螺线族, 只是当  $t \rightarrow -\infty$  时盘旋地趋近于点  $(0, 0)$ , 这时我们称  $(0, 0)$  为 **不稳定焦点**;  $\alpha = 0$  时, (3.5) 成为以  $(0, 0)$  为心的同心圆族, 因而奇点  $(0, 0)$  是稳定的, 但不是渐近稳定的. 它称为 **中心点**. 见相图 3.5.

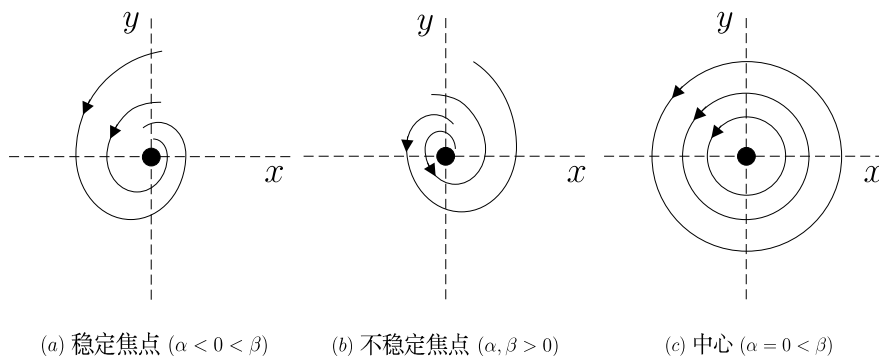


图 3.5: 焦点和中心

综合上面的讨论, 我们有如下判定初等奇点类型的结果.

**定理 3.1** 设  $p = -\text{tr}A, q = \det A$ . 则有

- 1) 当  $q > 0, p^2 = 4q$  时,  $(0, 0)$  为单向结点或星形结点;
- 2) 当  $q > 0, p^2 > 4q$  时,  $(0, 0)$  为两向结点;
- 3) 当  $q < 0$  时,  $(0, 0)$  为鞍点;
- 4) 当  $q > 0, 0 < p^2 < 4q$  时,  $(0, 0)$  为焦点;
- 5) 当  $q > 0, p = 0$  时,  $(0, 0)$  为中心点.

此外, 在情形 1), 2), 4) 中, 奇点  $(0, 0)$  的稳定性由  $p$  的符号来决定: 当  $p > 0$  时,  $(0, 0)$  是稳定的; 而当  $p < 0$  时,  $(0, 0)$  是不稳定的.

现在我们来考察在何种条件下, 非线性系统 (3.2) 在 origin 附近与 (3.3) 有相同的定性结构. 下面的定理给出了 (3.2) 与 (3.3) 有相同稳定性的充分条件. 它的证明见专著 [36] 第二章定理 4.2-4.6.

**定理 3.2** 1) 如果  $(0, 0)$  是 (3.3) 的焦点, 则它也是 (3.2) 的焦点, 并且它们的稳定性相同;

2) 如果  $(0, 0)$  是 (3.3) 的鞍点或两向结点, 则它也是 (3.2) 的鞍点或两向结点, 并且有相同的稳定性;

3) 如果  $(0, 0)$  是 (3.3) 的单向结点, 又对任给  $\varepsilon > 0$ , 都有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(x, y)}{r^{1+\varepsilon}} = 0, \quad (3.6)$$

则  $(0, 0)$  也是 (3.2) 的单向结点, 并且稳定性相同;

4) 如果  $(0, 0)$  是 (3.3) 的星形结点, 又  $R(x, y)$  满足条件 (3.6), 则  $(0, 0)$  也是 (3.2) 的星形结点, 并且稳定性相同.

还可以证明: 如果  $(0, 0)$  是 (3.3) 的双曲奇点, 即矩阵  $A$  的特征值的实部都异于零, 则只要  $R(x, y)$  及其导数足够小, (3.2) 就局部拓扑等价于 (3.3), 即在  $(0, 0)$  的一个小邻域内, 存在一个同胚变换 (即本身及其逆都连续的变换) 将 (3.2) 的轨线变到 (3.3) 的轨线, 并且还保持轨线的方向. 这时我们称 (3.3) 在  $(0, 0)$  附近是 **局部结构稳定** 的. 这样的结果对高维动力系统同样成立.

### 3.2 极限环

下面研究 (3.1) 的 **极限环**, 即孤立闭轨的性质. 我们将通过研究极限环来考察平面动力系统 (3.1) 的轨线分布. 所谓孤立的闭轨是指存在闭轨的一个邻域, 使得在此邻域内系统别无其它闭轨. 极限环的稳定性, 习惯上是指通常意义下的闭轨的渐近稳定性: 设  $\Gamma$  是 (3.1) 的一个极限环. 如果存在  $\Gamma$  的一个邻域, 使得从这个邻域内点出发的轨线当  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) 时都盘旋趋于  $\Gamma$ , 则称  $\Gamma$  是 **稳定 (不稳定)** 的. 如果存在  $\Gamma$  的一侧 (内侧或外侧) 邻域, 使得从这个邻域中点出发的轨线当  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) 时都盘旋趋于  $\Gamma$ , 则称  $\Gamma$  是 **单侧稳定 (不稳定)** 的. 有时也称一侧稳定而另一侧不稳定的极限环为 **半稳定极限环**.

**例 3.1** 考虑方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y(1 - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

作极坐标变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 这时方程组变为

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r(1 - r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} &= -1.\end{aligned}$$

由此容易推知  $x^2 + y^2 = 1$  是极限环, 并且是稳定的.

我们知道, 要想弄清 (3.1) 的轨线的全局分布, 必须研究 (3.1) 轨线的极限集的结构. 在这方面, 有如下著名的 **庞加莱 - 本迪克松 (Bendixson, 1861-1935) 定理**.

**定理 3.3** 设  $x = \varphi(t)$  是 (3.1) 的一条轨线, 它的  $\omega$ -极限集  $\Omega^+$  非空, 有界且不含奇点. 则  $\Omega^+$  恰是 (3.1) 的一条闭轨.

这个定理是平面定性理论的基础, 它的证明严重地依赖于平面上的约当曲线分离定理. 这个证明可在任何一本关于微分方程定性理论的专著中找到.

定理 3.3 有如下简明而有用的推论.

**定理 3.4 (庞加莱 - 本迪克松环域定理)** 设  $D$  是由两条简单闭曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  所围成的环域, 并且在  $\bar{D} = \Gamma_1 \cup D \cup \Gamma_2$  上, 系统 (3.1) 无奇点. 如果从  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  上出发的轨线都不离开 (或都不进入)  $\bar{D}$ , 而  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  均不是 (3.1) 的闭轨, 则  $D$  内至少存在一条闭轨  $\Gamma$  (见图 3.6).

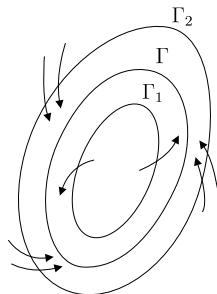


图 3.6: 环域定理

这个定理的物理意义是很明显的. 设 (3.1) 描述了平面流体运动. 如果流体都从边界流入  $D$ ,  $D$  中又没有源或汇, 那么在  $D$  内就有环流存在. 这里源指不稳定的结点和焦点, 而汇则指稳定的结点和焦点. 通常  $\Gamma_2$  称为 **外境界线**,  $\Gamma_1$  称为 **内境界线**. 定理 3.4 虽然肯定了  $D$  内有闭轨, 但没有说明闭轨是否是极限环. 可以证明: 如果 (3.1) 是解析向量场, 即  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  于  $\bar{D}$  上解析, 则  $D$  内的闭轨都是极限环. 应该指出, 在一般情形下, 作这种环域本身就是很复杂的问题, 没有一般方法可遵循. 然而对某些特殊类型方程, 如 **列娜 (Liénard) 方程**

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0,$$

其中函数  $f(x), g(x)$  是连续可微的,  $xg(x) > 0, x \neq 0$ , 已有较成熟的方法 (见 [36]).

另外一个重要的事实是: 庞加莱 - 本迪克松定理, 包括环域定理并不能简单地推广到相空间是 3 维以上的动力系统 (见 [17]).

下述的关于闭轨不存在的判别准则有时也是很有用的.

**定理 3.5 (本迪克松准则)** 设  $X(x, y), Y(x, y)$  在单连通区域  $D$  上是连续可微的. 若于  $D$  的任何子区域中散度

$$\operatorname{div}(X, Y) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

不恒为零, 并且不变号, 则 (3.1) 在  $D$  中无闭轨.

**证明** 假若不然, 设  $\Gamma: x = x(t), y = y(t) (0 \leq t \leq T)$  是 (3.1) 在  $D$  中的闭轨,  $T$  为周期. 以  $\tilde{D}$  表示由  $\Gamma$  所围成的区域. 由于  $D$  是单连通的, 我们有

$\tilde{D} \subset D$ . 根据格林 (Green, 1793-1841) 公式,

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{D}} \operatorname{div}(X, Y) dx dy &= \iint_{\tilde{D}} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \oint_{\Gamma} (X dy - Y dx) = \int_0^T \left( X \frac{dy}{dt} - Y \frac{dx}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^T (X(x(t), y(t))Y(x(t), y(t)) - Y(x(t), y(t))X(x(t), y(t))) dt = 0. \end{aligned}$$

这仅当  $\operatorname{div}(X, Y)$  在  $\tilde{D}$  上恒为零或变号时才可能. 定理证完.  $\square$

判别系统 (3.1) 的极限环的个数及其相对位置是一个非常困难的问题, 即使对多项式系统, 即  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  是二元多项式 (甚至是二次多项式) 情形, 极限环个数的上界问题也未获得完全解决, 后者是 1901 年希尔伯特 (Hilbert, 1862-1943) 提出的著名的 23 个数学难题中第 16 问题的后半部分. 许多数学家对这一问题的研究作出了不懈的努力, 其间充满反复和曲折. 一个重要的结果是:

**定理 3.6 (有限性定理)** 任何多项式系统 (3.1) 的极限环的个数在  $\mathbb{R}^2$  中都是有限的.

关于这方面的研究状况可参看 [14,16,33].

## 习 题

1. 判断下面系统奇点的类型, 并作出系统在奇点附近的相图.

(1)  $x' = x + 2y, \quad y' = x - 2y;$

(2)  $x' = x, \quad y' = x + 2y;$

(3)  $x' = 2x - y, \quad y' = x;$

(4)  $x' = 2x - y, \quad y' = 2x + y;$

(5)  $x' = x - y, \quad y' = 2x - y.$

2. 使用本迪克松准则说明下述的系统在  $\mathbb{R}^2$  上没有闭轨.

(1)  $x' = x + y, \quad y' = 4x + 2y;$

(2)  $x' = e^x + y, \quad y' = \cos x + e^x \sin y;$

(3)  $x' = 2xy + y^3, \quad y' = x^3 + y - y^2.$

3. 证明下述的 **杜拉克 (Dulac) 准则**: 设  $X(x, y), Y(x, y)$  在单连通区域  $D$  上是  $C^1$  的. 若在  $D$  存在  $C^1$  函数  $h(x, y)$  使得散度

$$\operatorname{div}(hX, hY) = \frac{\partial(hX)}{\partial x} + \frac{\partial(hY)}{\partial y} \neq 0,$$

在  $D$  中保持定号, 且不在  $D$  的任何子区域中恒等于零, 则 (3.1) 在  $D$  中无闭轨. 上述性质的函数  $h(x, y)$  通常称之为 **杜拉克函数**.



4. 使用杜拉克函数  $h(x, y) = be^{-2dx}$  来证明系统

$$x' = y, \quad y' = ax + by + cx^2 + dy^2$$

于  $\mathbb{R}^2$  无闭轨, 其中  $a, b, c, d$  是实常数, 且  $b \neq 0$ .

5. 利用庞加莱 - 本迪克松定理证明: 系统

$$x' = x - y - x^3, \quad y' = x + y - y^3$$

在环域  $A: 1 \leq r \leq \sqrt{2}$  中有闭轨, 其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .