

§ 4 结构稳定性, 分支与混沌 *

微分方程定性理论从创立之日起, 由于在各门科学领域中的广泛应用而呈现出巨大的活力. 特别是科学技术的快速发展, 为定性理论的研究提供了更多的新课题. 这里我们就其中几个方面的问题, 作一个简要的介绍.

4.1 结构稳定性与分支现象

我们曾在 §3 中谈到动力系统在其奇点附近的局部结构稳定性. 结构稳定的概念是由安德洛诺夫 (Andronov, 1901-1952) 和庞特里亚金 (Pontryagin, 1908-1988) 于 1937 年对平面系统引进的. 几十年来, 关于结构稳定性的研究有了很大的发展. 可以说近三十年来, 动力系统的研究中所发生的重大变化, 主要来源于结构稳定性的研究. 结构稳定的概念除了理论上的意义之外, 对于实际应用也有着重要意义. 这是因为从实际问题中提出微分方程模型, 往往经历了近似与简化过程. 为使对数学模型进行研究所得出的结论能真实地反映实际, 就要求在小扰动下仍能保持某种程度的不变结构, 即要求这一数学模型具有一定的结构稳定性.

设 G 为 \mathbb{R}^n 中一有界闭域, $X(x) \in C^1(G)$, 即 $X(x)$ 为连续可微的 n 维向量场. 考虑自治系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \quad (4.1)$$

如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得对 G 上任何 n 维的 C^1 向量场 $Y(x)$, 只要

$$|Y - X|_1 = |Y - X| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial Y}{\partial x_i} - \frac{\partial X}{\partial x_i} \right| < \varepsilon,$$

则系统

$$\frac{dx}{dt} = Y(x) \quad (4.2)$$

在 G 上拓扑等价于系统 (4.1), 即存在一个同胚变换 $P: G \rightarrow G$, 将 (4.2) 的每条轨线变到 (4.1) 的相应轨线, 并且保持轨线的方向不变, 就称系统 (4.1) 在 G 上是 **结构稳定** 的.

由定义就知, 在 C^1 小扰动下结构稳定的系统, 它的奇点的稳定性保持不变.

当 $n = 2$ 时, 系统 (4.1) 为结构稳定的充要条件是:

1. 系统在 G 上只有有限个奇点和闭轨, 且奇点都是双曲的, 而闭轨都是单重的;
2. 在鞍点之间无轨线连接.

这一结果首先由安德洛诺夫和庞特里亚金于 1937 年提出, 直到 1957 年才由他人给出证明.

系统 (4.1) 的奇点是双曲的, 是指 (4.1) 在奇点处线性部分的矩阵的特征根的实部不为零.

为了解释单重闭轨的含义, 我们引进庞加莱映射的概念.

设 Γ 是二维动力系统 (4.1) 的闭轨, P 为 Γ 上一点, 过 P 作 Γ 的法线 \overline{MN} , 方向指向 Γ 的外部. 在 \overline{MN} 上引入坐标 s , 它表示 \overline{MN} 上点 P_0 到点 P 的有向距离, \overline{MN} 称为 **无切线段**. 由解对初值的连续性可知, 当 P_0 充分靠近 P 时, 从 P_0 出发的轨线必再次与 \overline{MN} 相交. 设第一个交点为 P_1 , 它在 \overline{MN} 上的坐标为 s_1 . 我们称映射 $P_0 \rightarrow P_1$ 为 **庞加莱映射**, 并称函数 $h(s) = s_1$ 为 **后继函数**, P_1 称为 P_0 的 **后继点**. 令 $\lambda(s) = h(s) - s$. 根据解对初值的可微性定理, $\lambda(s)$ 于 $s = 0$ 附近可微. 如果 $\frac{d\lambda}{ds} \Big|_{s=0} \neq 0$, 则称 Γ 是 **单重** 的; 否则称 Γ 是 **多重** 的. 根据 $\lambda(s)$ 的变化, 人们可以推断 Γ 的稳定性及其随参数变化的规律 (当所考虑的系统含有适当的参数时).

结构不稳定的系统, 称之为 **分支系统**. 分支系统由于不具有结构稳定性, 对它加上适当的扰动, 轨线分布就会发生定性变化, 表现出一些复杂的现象.

下面介绍平面动力系统几种常见的分支模式. 考虑带有一个参数的系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, \alpha), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, \alpha), \quad (4.3)$$

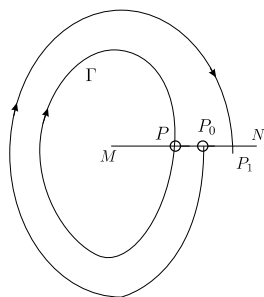


图 4.1: 后继函数

其中参数 $\alpha \in [0, 1]$, $X(x, y, \alpha)$ 和 $Y(x, y, \alpha)$ 关于 (x, y, α) 在 $G \times [0, 1]$ 上是两次连续可微的, G 是 \mathbb{R}^2 中一有界闭域. 设 (4.3) 在 $\alpha = 0$ 时是结构不稳定的, 此时, 称 $\alpha = 0$ 是一个 **分支值**.

1. **霍普夫(Hopf, 1902-1983)分支**. 设 $(0, 0)$ 是系统 (4.3) 在 $\alpha = 0$ 时的奇点, 并且矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0,0)}$$

的特征根是一对共轭纯虚数, 这时 $(0, 0)$ 是 (4.3) 在此点处的线性部分的中心点. 当 α 从零增大时, 有可能从原点分出周期解分支, 称为 **霍普夫分支**, 而 $(0, 0, 0)$ 则称为 **霍普夫分支点**.

下述基本结果给出了系统 (4.3) 存在霍普夫分支的条件.

定理 4.1 (霍普夫分支定理) 假设 $X(0, 0, \alpha) \equiv 0, Y(0, 0, \alpha) \equiv 0$, 并且含参数 α 的矩阵

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0,\alpha)} \quad (4.4)$$

有特征根 $\lambda(\alpha) \pm i\mu(\alpha)$, 满足

$$\lambda(0) = 0, \quad \mu(0) > 0, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha}(0) \neq 0. \quad (4.5)$$

则 $(0, 0, 0)$ 是系统 (4.3) 的霍普夫分支点.

证明 不妨设

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda(\alpha) & \mu(\alpha) \\ -\mu(\alpha) & \lambda(\alpha) \end{pmatrix},$$

因为经过适当的坐标变换, 可以化成这种情形. 这样, 引进极坐标 (θ, ρ) 就可在原点附近将系统 (4.3) 写成如下的形式:

$$\begin{aligned} \theta' &= \mu(\alpha) + \Theta(\theta, \rho, \alpha), \\ \rho' &= \lambda(\alpha)\rho + \Lambda(\theta, \rho, \alpha), \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中 $\Theta(\theta, \rho, \alpha)$ 和 $\Lambda(\theta, \rho, \alpha)$ 关于 θ 都是 2π 周期函数, $\Theta(\theta, 0, \alpha) = 0, \Lambda(\theta, 0, \alpha) = 0, \Lambda_\rho(\theta, 0, \alpha) = 0$. 以 $\theta(t, \rho_0, 0, \alpha), \rho(t, \rho_0, 0, \alpha)$ 表示 (4.6) 具有初值 $\theta(0) = 0, \rho(0) = \rho_0$ 的解. 如我们在 §2 中所指出, 不妨认为它们对所有 t 有定义. 注意到 $\mu(0) > 0$, 我们可从 (4.6) 消去 t (至少当 ρ 充分小时) 而得到

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\lambda(\alpha)}{\mu(\alpha)}\rho + \Lambda_*(\theta, \rho, \alpha), \quad (4.7)$$

其中 $\Lambda_*(\theta, \rho, \alpha)$ 关于 θ 是 2π 周期函数, 并且 $\Lambda_*(\theta, 0, \alpha) = 0, \Lambda_{*\rho}(\theta, 0, \alpha) = 0$. 以 $\rho(\theta, \rho_0, \alpha)$ 表示系统 (4.7) 具初值 $\rho(0) = \rho_0$ 的解. 利用常数变易公式, 我们有

$$\rho(\theta, \rho_0, \alpha) = e^{\theta \frac{\lambda}{\mu}} \rho_0 + \int_0^\theta e^{(\theta-s) \frac{\lambda}{\mu}} \Lambda_*(s, \rho(s, \rho_0, \alpha), \alpha) ds.$$

由此知, $\rho(\theta, \rho_0, \alpha)$ 为 (4.7) 的周期解, 当且仅当

$$(1 - e^{2\pi \frac{\lambda}{\mu}}) \rho_0 = \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\theta) \frac{\lambda}{\mu}} \Lambda_*(\theta, \rho(\theta, \rho_0, \alpha), \alpha) d\theta.$$

以 ρ_0 除上式得

$$h(\alpha) \equiv 1 - e^{2\pi \frac{\lambda}{\mu}} = r^*(\rho_0, \alpha),$$

其中

$$r^*(\rho_0, \alpha) = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-\theta) \frac{\lambda}{\mu}} \Lambda_*(\theta, \rho(\theta, \rho_0, \alpha), \alpha) d\theta.$$

不难看出 $r^*(0, 0) = 0, r_{\alpha}^*(0, 0) = 0$, 并且由 (4.5) 有

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = -2\pi \frac{\lambda'(0)}{\mu(0)} \neq 0.$$

于是由隐函数定理知, 对小正数 ρ_0 , 存在连续函数 $\alpha(\rho_0)$ 使得

$$h(\alpha(\rho_0)) = r^*(\rho_0, \alpha(\rho_0)), \quad \alpha(0) = 0.$$

对任何小正数 $\rho_0, \rho(\theta, \rho_0, \alpha(\rho_0))$ 都是当 $\alpha = \alpha(\rho_0)$ 时 (4.7) 的 2π 周期解.

考虑函数

$$\theta = \theta(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)), \quad \rho = \rho(\theta(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)), \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)). \quad (4.8)$$

对任何小正数 ρ_0 , 它都是当 $\rho = \rho_0, \alpha = \alpha(\rho_0)$ 时 (4.6) 的解, 具有初值 $\theta(0) = 0, \rho(0) = \rho_0$. 由解的唯一性定理知, 必有 $\rho(\theta(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)), \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)) \equiv \rho(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0))$. 显然 $\rho(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0))$ 是 t 的周期函数. 因此, 对小正数 ρ_0 , 我们得到 (4.3) 的一族周期解

$$\begin{aligned} x &= \rho(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)) \cos \theta(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)), \\ y &= \rho(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)) \sin \theta(t, \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)). \end{aligned}$$

设 $T(\rho_0)$ 为与 ρ_0 对应的周期解的周期. 则 $\theta(T(\rho_0), \rho_0, 0, \alpha(\rho_0)) = 2\pi$. 在 (4.6) 的第一式中令 $\alpha = \alpha(\rho_0)$, 同时将 (4.8) 代入, 然后从 0 到 $T(\rho_0)$ 积分, 便得到

$$2\pi = \mu(\alpha(\rho_0))T(\rho_0) + \int_0^{T(\rho_0)} \Theta(\theta, \rho_0, \alpha(\rho_0)) dt.$$

当 $\rho_0 \rightarrow 0$ 时, 上式右端的积分趋于 0, 故 $T(\rho_0) \rightarrow \frac{2\pi}{\mu(0)}$. 定理证完. \square

2. 同宿轨分支和异宿轨分支. 当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时趋于同一个奇点的轨线称为 **同宿轨**(见图 4.2a). 当 $t \rightarrow +\infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 时分别趋于两个奇点的轨线称为 **异宿轨**(见图 4.3a). 可以构造单参数的系统族 (4.3), 使得当 $\alpha = 0$ 时存在一条同宿轨, 而当 $\alpha \neq 0$ 时, 这条轨线“破裂”为两条轨线, 其中每一条都有一段趋于所论奇点(见图 4.2b); 这种由于同宿轨“破裂”而产生的分支, 称为 **同宿轨分支**. 同样可以构造这样的系统族 (4.3), 使得当 $\alpha = 0$ 时存在一条异宿轨, 而当 $\alpha \neq 0$ 时, 这条轨线“破裂”为两条轨线, 分别趋于所论的两个奇点(见图 4.3b); 这种由异宿轨“破裂”而产生的分支称为 **异宿轨分支**.

应该指出的是, 如果扰动后的系统是非自治的, 则由于扰动而产生的分支现象将更为复杂.

还有许多其它类型的分支, 这里不再介绍, 可参看 [12,21,24,31,37].

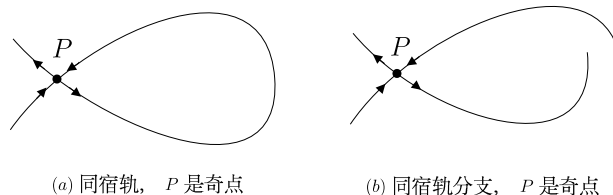


图 4.2: 同宿轨与同宿轨分支

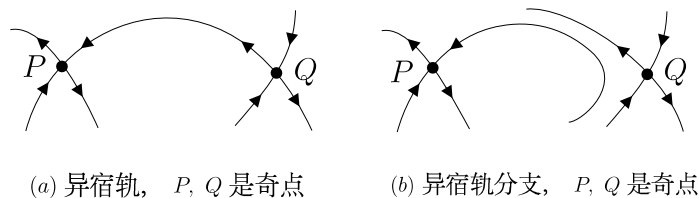


图 4.3: 异宿轨与异宿轨分支

4.2 动力系统的混沌

我们知道，一个动力系统的平衡解，周期解和概周期解，都对应着比较规则的运动。早在二十世纪六十年代，人们就发现：某些动力系统有非常复杂的，不规则的轨线。为了描述动力系统的这种不规则的行为，1975年，李天岩和约克 (Yorke) 在研究从区间到区间的某些映射的性质时，提出了混沌这一概念。自那之后，混沌就逐渐成为许多学科分支研究的主要课题之一。下面我们就二维动力系统简单地介绍混沌现象及判别混沌的基本数学方法。

设 $\varphi(p)$ 是 \mathbb{R}^2 到 \mathbb{R}^2 的 $C^r (r \geq 1)$ 同胚映射， p_0 是它的一个不动点，即 $\varphi(p_0) = p_0$ 。如果雅可比矩阵 $\frac{\partial \varphi}{\partial p} \Big|_{p=p_0}$ 不具有模为 1 的特征根，则称不动点 p_0 是 **双曲** 的。一个点 $p_0 \in \mathbb{R}^2$ 的 **稳定流形** 和 **不稳定流形** 分别定义为集合：

$$W^s(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \varphi^n(p) \rightarrow p_0, n \rightarrow +\infty\}$$

和

$$W^u(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \varphi^{-n}(p) \rightarrow p_0, n \rightarrow +\infty\},$$

其中 $\varphi^n(p) = \varphi(\varphi^{n-1}(p))$ 。一般称 $\{\varphi^n(p) : n \text{ 是整数}\}$ (我们规定 $\varphi^0(p) = p, \varphi^1(p) = \varphi(p)$) 为 φ 在 p 点的 **轨道**。称 $W^s(p_0) \cap W^u(p_0) \setminus \{p_0\}$ 中的点为关于 p_0 的 **同宿点**，这种点的轨道称为 **同宿轨**。可以证明：此时 $W^s(p_0)$ 和 $W^u(p_0)$ 是 \mathbb{R}^2 中的两条光滑曲线 (r 次连续可微)。设 q_0 是关于 p_0 的同宿点。如果稳定流形和不稳定流形所产生的两条光滑曲线在 q_0 点的切线不共线，就称它们于 q_0 点 **横截相交**，也称点 q_0 为 **横截同宿点**。

横截同宿点的存在性蕴涵着动力系统的轨道存在非常复杂的性态。下述重要结果比较精细地刻画了这种复杂性。

定理 4.2 设 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是微分同胚，且具有双曲不动点 p_0 和关于 p_0 的横截同宿点 q_0 。则存在 φ 的不变集 Λ ，这个不变集包含

- 1) 可数多个周期轨道，包括任意大周期的轨道；
- 2) 不可数多个非周期轨道，包括可数多个同宿轨和异宿轨；
- 3) 一条稠密轨道。

下面对定理叙述中的一些概念作简单的说明。

所谓可数是指像整数一样多;不可数是指像实数一样多. 假如 φ 有两个不同的双曲不动点 p_1, p_2 , 则称 $W^s(p_1) \cap W^u(p_2)$ 中的点为 **异宿点**, 由异宿点所产生的轨道称为 **异宿轨**.

一个点 $p \in \mathbb{R}^2$ 称为 φ 的 $k(> 1)$ **周期点**, 如果

$$\varphi^k(p) = p, \varphi^i(p) \neq p, 1 \leq i \leq k-1.$$

不动点也称为 1 周期点. k 周期点产生的轨道称为 **周期轨**, k 称为周期.

从不变集 Λ 的结构我们看出, Λ 中的轨道呈现非常复杂的行为. 特别, 在周期点附近初值的微小偏差, 可引起相应轨道的不可预见的偏差, 或者说, 轨道对初始条件具有 **敏感依赖性**. 正是由于这个原因, 数学家们才称 φ 产生了 **浑沌**.

伯克霍夫曾阐述了这种复杂性的一部分, 他证明了同宿点的任一邻域内存在可数多个周期轨道. 1963 年, 斯梅尔 (Smale, 1930-) 证明了上述定理. 因此这个定理今天也称为 **斯梅尔 - 伯克霍夫定理**.

为了应用这个定理, 首先要判断一个微分同胚是否存在双曲不动点以及关于这个不动点的横截同宿点. 应该指出, 如何判断一个微分同胚是否存在横截同宿点, 并不是容易的事. 1963 年, 梅林科夫 (Melnikov) 建立了一种非常重要的方法, 它使我们能对某些特殊的周期性受扰系统证明它们的庞加莱映射存在着横截同宿点. 从而应用斯梅尔 - 伯克霍夫定理, 便可证明浑沌的存在性.

下面我们扼要地介绍梅林科夫方法, 详细的讨论见 [6,12,18,25,31].

考虑二维周期系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon g(t, x), \quad (4.9)$$

其中 $x, f(x), g(t, x)$ 是二维列向量, $\varepsilon \in [-1, 1]$, 对 $x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, f(x), g(t, x)$ 连续可微, 且对某正数 $T, g(t+T, x) = g(t, x)$. 此外, 假定当 $\varepsilon = 0$ 时, (4.9) 存在鞍点 p_0 , 以及与 p_0 相连的同宿轨线 $\Gamma: x = x_0(t)$. 对

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

记 $a \wedge b = a_1 b_2 - a_2 b_1$. 对 (4.9) 定义 **梅林科夫函数** 如下:

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0(t)) \wedge g(t+t_0, x_0(t)) \cdot \exp \left\{ - \int_0^t \operatorname{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0(s)} \right) ds \right\} dt. \quad (4.10)$$

我们有如下重要结果.

定理 4.3 (梅林科夫定理) 若 $M(t_0)$ 存在简单零点, 即存在 $t_1 \in [0, T]$, 使得 $M(t_1) = 0, M'(t_1) \neq 0$, 则当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小时, 系统 (4.9) 的庞加莱映射

$$\varphi(p) = x(t_0 + T, t_0, p, \varepsilon)$$

存在横截同宿点, 其中 $x(t, t_0, p, \varepsilon)$ 表示 (4.9) 满足初值条件 $x(t_0) = p$ 的解, $t_0 \in [0, T]$.

梅林科夫方法已被推广到高维动力系统. 可参见 [18,31].

例 4.1 考虑系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - x^3 + \varepsilon \gamma \cos(\omega t) - \varepsilon \delta y, \quad (4.11)$$

其中 γ, ω, δ 都是正常数, $|\varepsilon|$ 充分小. 这一系统可看作一些实际物理系统的模型, 例如肌型血管模型. 当 $\varepsilon = 0$ 时, (4.11) 变成

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - x^3, \quad (4.12)$$

$(0, 0)$ 是它的鞍点, 即其线性近似的鞍点, 并且存在与它相连的同宿轨

$$\Gamma: \begin{cases} x = x_0(t) = \sqrt{2}\operatorname{sech}t, \\ y = y_0(t) = -\sqrt{2}\operatorname{sech}t \tanh t, \end{cases}$$

其中 $\operatorname{sech}t = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$, $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$. $(x_0(t), y_0(t))$ 是 (4.12) 的解 (可直接验算).

沿着 Γ 的梅林科夫函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y_0(t), x_0(t) - x_0^3(t)) \wedge (0, \gamma \cos(\omega(t+t_0)) - \delta y_0(t)) dt \\ &= -\sqrt{2}\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}t \cdot \tanh t \cdot \cos(\omega(t+t_0)) dt \\ &\quad - 2\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}t \cdot \tanh t \cdot \operatorname{sech}(t+t_0) \cdot \tanh(t+t_0) dt. \end{aligned}$$

可以算出 (计算很复杂, 其中还要用到复变函数论中的留数理论)

$$M(t_0) = -\frac{4}{3}\delta + \sqrt{2}\gamma\pi\omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \cdot \sin(\omega t_0).$$

由于在 $0 \leq t_0 < \frac{\pi}{2\omega}$ 上,

$$M'(t_0) = \sqrt{2}\gamma\pi\omega^2 \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \cdot \cos(\omega t_0) \neq 0,$$

故 $M(t_0)$ 在 $0 \leq t_0 < \frac{\pi}{2\omega}$ 上的零点都是简单的. 注意到

$$M(0) = -\frac{4}{3}\delta, \quad M\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = -\frac{4}{3}\delta + \sqrt{2}\gamma\pi\omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right),$$

就知当

$$-\frac{4}{3}\delta + \sqrt{2}\gamma\pi\omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) > 0, \quad (4.13)$$

即

$$\delta < \frac{3}{4}\sqrt{2}\gamma\pi\omega \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)$$

时, $M(t_0)$ 在 $0 \leq t_0 < \frac{\pi}{2\omega}$ 上有简单零点, 因而这时系统 (4.11) 的庞加莱映射

$$\varphi(p) = (x(t_0 + T, t_0, p, \varepsilon), y(t_0 + T, t_0, p, \varepsilon))$$

存在横截同宿点. 还可以证明, 庞加莱映射当 $|\varepsilon|$ 充分小时存在双曲不动点. 因此, 根据定理 4.2, 在条件 (4.13) 下, 当 $|\varepsilon|$ 充分小时, 变换 φ 产生混沌, 或者说, 系统 (4.11) 产生混沌. 因为 δ 表示阻尼系数, 这就说明小阻尼系统常常出现混沌现象.

习 题

1. 证明: 对线性系统 $x' = Ax$, A 是 n 阶实矩阵, 不能存在同宿轨或异宿轨.
2. 证明: $(0, 0, 0)$ 是下列系统的霍普夫分支点.
 - (1) $x' = -y + x(\alpha - x^2 - y^2)$, $y' = x + y(\alpha - x^2 - y^2)$;
 - (2) $x' = 4y + 2x(\alpha - x^3)$, $y' = -x + 2y(\alpha + y^5)$;
 - (3) $x' = \alpha x - y + xy^2$, $y' = x + \alpha y - x^2 - y^2$.
3. 利用无切线段和庞加莱映射证明: 在庞加莱-本迪克松环域定理中, 如果还设系统是解析的, 则环域中只有有限多条闭轨, 且每一闭轨都是极限环.