§6 守恒系统 *

有些物理系统遵从某种形式的能量守恒定律，它们的能量随着时间的变化并不发生改变． 如果这种系统的变化规律能用常微分方程来加以描述，则称这样的微分方程为 **守恒系统**. 第一章 §1 例 7 中所述哈密顿系统是这类系统的重要特例． 下面我们扼要地介绍这类系统的一些基本性质．

考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x), \tag{E}$$

其中 $f(t,x)$ 于 $I\times G$ 上 连续可微， $I\subset\mathbb{R}^1$ 是一区间， $G\subset\mathbb{R}^n$ 是一区域．

如果存在于 $I\times G$ 上连续可微的函数 $M:(t,x)\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 和 $H:(t,x)\to\mathbb{R}^1$, 使得

$$f(t,x)=M(t,x)\nabla_x H(t,x),\quad \nabla_x=\frac{\partial}{\partial x},$$

而矩阵 $M(t,x)$ 是实反对称的，则称方程 (E) 是 **守恒系统**.

显然, 当 $M(t,x)\equiv\begin{pmatrix} O & -E_n\\ E_n & O\end{pmatrix}\equiv J, E_n$ 是 n 阶单位阵, 而 $x=(p,q)=(p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n)\in\mathbb{R}^{2n}, H=H(p,q)$ 时，系统 (E) 是通常的 (自治) 哈密顿系统，即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{6.1}$$

这时， n 称为系统的 **自由度**.

N- 体动力学系统

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t^2}=-\sum_{1\le j\le N, j\ne i}Gm_im_j\frac{\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j\|^3},\quad i=1,\cdots,N \tag{6.2}$$

是守恒的，因为只要令 $p_i=m_i\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}t}, q_i=\mathbf{x}_i, i=1,\cdots,N$, 并且取

$$H=\sum_{i=1}^N\frac{\|p_i\|^2}{2m_i}-U,\quad U=\sum_{1\le i<j\le N}\frac{Gm_im_j}{\|q_i-q_j\|},$$

系统 (6.2) 就能化成哈密顿系统 (6.1).

假设 $f(t,x)$ 于 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微，则

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f(t,x)$$

也是哈密顿系统．事实上，令 $p=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, q=x$, 并且取

$$H=\frac{1}{2}p^2-\int_0^q f(t,x)\mathrm{d}x,$$

就能把上述方程化成哈密顿形式．

守恒系统有如下明显的性质:

命题 6.1 *设 $x=x(t)$ 是守恒系统 (E) 在区间 I 上的解．则*

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(t,x(t))\equiv\frac{\partial H}{\partial t}(t,x(t)),\quad t\in I.$$

特别地，如果 H 不含 t, 则

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(x(t))\equiv 0,\quad t\in I,$$

从而 $H(x(t))\equiv c$(常数).

证明 只需注意，根据矩阵 $M(t,x)$ 的反对称性，对任何 n 维 (列) 向量 ξ, 有

$$\xi^\top M\xi = 0.$$

故

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\nabla_x H)^\top \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\nabla_x H)^\top M(\nabla_x H) = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

□

对方程组 (E), 如果有

$$\mathbf{div} f(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \equiv 0,$$

则称它为 **零散度系统**.

对于零散度系统，我们有

定理 6.1 零散度系统 (E) 的解 $x = \varphi(t,\tau,\xi), \tau \in I$ 是保体积的，即

$$\int_D \mathrm{d}x = \int_{\varphi(t,\tau,D)} \mathrm{d}x, \quad t \in I,$$

其中 $D \subset G$ 是任意有界闭区域， $\varphi(t,\tau,D) = \{\varphi(t,\tau,\xi) : \xi \in D\}$, $\varphi(t,\tau,\xi)$ 是 (E) 的满足初值条件 $x(\tau) = \xi$ 的解.

证明 首先对任意 $t \in I$, 由重积分变量替换公式有

$$V(t) \equiv \int_{\varphi(t,\tau,D)} \mathrm{d}x = \int_D \det\left(\frac{\partial \varphi(t,\tau,\xi)}{\partial \xi}\right) \mathrm{d}x.$$

注意到

$$\begin{aligned}
V'(t) &= \int_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\left(\frac{\partial \varphi(t,\tau,\xi)}{\partial \xi}\right) \mathrm{d}x, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi(t,\tau,\xi)}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,\tau,\xi))\frac{\partial \varphi(t,\tau,\xi)}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial \varphi(\tau,\tau,\xi)}{\partial \xi} &= E,
\end{aligned}$$

因此，由刘维尔公式 (第二章 §3) 知：

$$\begin{aligned}
\int_D \det\left(\frac{\partial \varphi(t,\tau,\xi)}{\partial \xi}\right) \mathrm{d}x &= \int_D \exp\left\{\int_\tau^t \mathrm{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t,\tau,\xi))\right)\mathrm{d}t\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_D \mathrm{d}x = V(0), \quad t \in I.
\end{aligned}$$

□

作为这个定理的应用，有如下结论.

推论 6.1 **(刘维尔定理)** 哈密顿系统 *(6.1)* 是零散度系统，因而它的解是保体积的. 特别，自由度为 *1* 的哈密顿系统的解是保面积的.

保体积映射有下面的基本性质.

定理 6.2 **(庞加莱回复定理)** 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是有界闭区域， $\varphi : D \to D$ 是保体积同胚. 则对任意 区域 $U \subset D$, 都存在一点 $x \in U$ 和整数 $k > 0$, 使得 $\varphi^k(x) \in U$, 即 x 在 φ 下的轨道将会回到 U 中.

证明 考虑 U 在 φ 下的像：

$$U, \quad \varphi(U), \quad \varphi^2(U), \cdots.$$

按假设它们都有相同的体积. 如果它们互不相交, 则 D 将有无限的体积, 而与 D 有界的假设矛盾. 因此, 存在整数 $j > i > 0$ 使得

$$\varphi^j(U)\bigcap\varphi^i(U)\neq\emptyset,$$

其推出

$$\varphi^{i-j}(U)\bigcap U\neq\emptyset.$$

取 $x\in\varphi^{i-j}(U)\bigcap U$ 和 $k=j-i$. 则有 $x\in U,\varphi^k(x)\in U$. □

上述事实在经典力学和统计物理学中起着重要的作用.

根据命题 5.1, 如果 (E) 是自治的, 即 $f(t,x)=f(x)$, 而 $f(x)$ 于 G 上连续可微且处处不为零, 则在 G 的每一点附近, 方程有且仅有 $n-1$ 个相互独立的首次积分. 假如能得到系统在 G 上 $m(\leq n-1)$ 个相互独立的首次积分

$$\Phi_i(x)=c_i,\quad i=1,\cdots,m, \tag{6.3}$$

其中 $c_i, i=1,\cdots,m$ 是任意常数. 可否利用这 m 个首次积分消去方程的一些变量, 以降低方程的维数呢？回答是肯定的.

事实上, 利用隐函数定理, 从 (6.3) 可解出 $u=g(v,c)$, 其中 $u\in\mathbb{R}^m, v\in\mathbb{R}^{n-m}, x=(v,u), c=(c_1,\cdots,c_m)$. 按变量 (u,v), 将 (E) 写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F(v,u),\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= R(v,u).\end{aligned}$$

然后将 $u=g(v,c)$ 代入前 $n-m$ 式, 便得到

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(v,u(v,c)),$$

其中 c 是 m 维常向量. 这是一个 $n-m$ 维的微分方程. 这样一来方程的维数就降低了 m.

对 $2n$ 维自治哈密顿系统 (6.1), 人们发现: 如果于 G 上存在 n 个相互独立的首次积分 $F_i(x)=c_i, i=1,\cdots,n$, 并且它们是相互正合的, 即 **泊松** (Poisson, 1781-1840) **括号** 都为零:

$$\{F_i,F_j\}\equiv\frac{\partial F_i}{\partial x}J\frac{\partial F_j}{\partial x}=0,\quad i,j=1,\cdots,n;\quad F_1=H,$$

且每个水平集

$$M_c=\{x:F_i(x)=c_i, i=1,\cdots,n\}$$

都是有界闭集, 则存在微分同胚 $x=\Psi(p,q)$, 使得在这个变换下, 系统 (6.1) 变成可积系统, 即变成下列情形

$$H(x)=H(\Psi(p,q))=H_0(p).$$

因此, 变换后的系统的解能用初等积分法求出

$$p(t)\equiv p(0),\quad q(t)=q(0)+\omega t,\quad t\in\mathbb{R}^1;\quad \omega=\frac{\partial H_0}{\partial p}(p(0)).$$

正因为如此, 通常称满足上述条件的哈密顿系统是 **刘维尔意义下可积** 的. 这个事实有时称为 **刘维尔 - 阿诺尔德** (Arnold, 1937-) **定理**. 它的证明是很复杂的 ([1]).

从刘维尔 - 阿诺尔德定理可知, 1 个自由度的哈密顿系统是可积的. 2- 体问题 (如太阳 - 地球所构成的动力学体系), 利用一些守恒关系, 能够约化成平面上的 (1 个自由度) 哈密顿系统, 因此是可积的, 遵从刻卜勒定律. 3- 体问题 (如地球 - 月亮 - 太阳所构成的动力学体系) 能够约化成 6 维 (3 个自由度) 的哈密顿系统, 是不可积的. 更多体问题构成的动力学体系更是如此. 在第一章 §1 例 6 中我们曾提到天体

力学的一个基本问题：在有限的时间里，是否有天体之间发生相撞，或者有某个天体脱离这个星系？经过长期的研究，人们发现： 3- 体问题只可能发生前者，而且几率为零； 3- 体以上问题发生碰撞的几率也为零； 5- 体以上问题确实存在非碰撞奇性，即发生后者情形 (见 [26]). 实际上，在太阳系中，太阳的质量很大，其它九大行星的质量总和不超过太阳质量的 0.002 倍，太阳可以视为相对静止；如果忽略行星之间引力的相互作用，每个行星与太阳一起构成 2- 体问题，因而可以看成是可积的，并且行星的运动是永恒稳定的，即像地球绕太阳运行这样的机制永远保持不变．然而，如果在充分长的时间尺度上考虑稳定性问题，我们就必须将行星之间引力的相互作用这种 “小” 的影响考虑在内．这时我们在一定程度上能把太阳系动力学体系看成是接近可积的动力系统，这类系统称为 **近可积系统**.

在数学上，一个可积哈密顿系统有着如下形式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H(p)}{\partial p},\\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= 0,\end{aligned}$$

其中 $p\in D\subset\mathbb{R}^n$ 称为 **作用变量**, $q\in\mathbb{R}^n$ 称为 **角变量**. 按变量 (p,q), 近可积系统可表示如下

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q\\ p\end{pmatrix}=J\nabla(H(p)+\varepsilon P(q,p,\varepsilon)),$$

其中 ε 是小参数， $H(p)$ 和 $P(q,p,\varepsilon)$ 是解析或适当次可微的函数，关于每个分量 $q_i, i=1,\cdots,n$ 是 2π-周期的，并且满足一定的非退化条件，如 **柯尔莫戈洛夫** (Kolmogorov, 1903-1987) **条件**: $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}$ 于 D 上非奇异.

庞加莱提出可积系统的稳定性机制有多少在小扰动下保持下来这一 **动力学基本问题**. 对太阳系而言，这相当于问九大行星绕太阳这种 (多周期) 运行机制在将来是否永远没有大的变化．实际上，从拉普拉斯开始，人们就着手研究这个问题．经过近两个世纪的努力，直到二十世纪六十年代，著名数学家柯尔莫戈洛夫，阿诺尔德和莫泽尔 (Moser, 1928-1999) 创立了 **KAM 理论**, 才基本上回答了大多数情形可积系统多周期运行机制在小扰动下的保持性问题 (见 [4,19]). 这一重要的理论在动力系统，经典力学和数学物理等分支领域中有着广泛而深刻的应用.

习　题

1. 证明推论 6.1.

2. 设 S^1 是单位圆周, h 是一个将圆周上的点同时旋转 $\alpha>0$ 角的映射. 证明: 若 $m\alpha\neq 2n\pi$, $m,n\in\mathbb{N}$, 则 S^1 上每一点在 h 下的轨道均于 S^1 上稠密.

3. 设原点是哈密顿系统 (6.1) 的平衡点．证明：系统 (6.1) 在原点的任意邻域中出发的解不能全部正向趋于原点.