§1 引言

所谓 **一阶偏微分方程**, 指的是

$$F(x_1,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n})=0, \tag{1.1}$$

其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是自变量, u 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的未知函数.

定义在 $(x_1,\cdots,x_n)$ 空间某域 D 内的函数 $u=\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ 称为方程 (1.1) 在域 D 内的 **解**, 如果它在域 D 内有一阶偏导数, 并且代入 (1.1) 后得到的是一个在 D 内成立的恒等式. 方程 (1.1) 的解 $u=\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ 可以看成代表 $(x_1,\cdots,x_n,u)$ 空间中的一个曲面, 习惯上称为方程 (1.1) 的 **积分曲面**.

与一阶偏微分方程特别有关的定解问题是初值问题. 对于一阶正规形偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=f(x_1,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}),$$

其初值问题是: 求它满足初值条件

$$u|_{x_1=x_1^0}=\varphi(x_2,\cdots,x_n)$$

的解, 其中 x_1^0 是 x_1 的一给定值, $\varphi(x_2,\cdots,x_n)$ 是 $x_2,\cdots,x_n$ 的已知函数.

本章讨论形如

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=c(x_1,\cdots,x_n,u) \tag{1.2}$$

的方程, 它称为 **一阶拟线性方程**. 如果函数 a_i 都不依赖于 u, 即形如

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=c(x_1,\cdots,x_n,u) \tag{1.3}$$

的方程称为 **半线性方程**. 如果 c 对 u 还是线性的, 则方程 (1.3) 称为 **线性方程**.

在关于一阶偏微分方程的研究中, 特征的概念是最基本和最重要的. 我们假定 $a_1,\cdots,a_n$ 不同时为零. 这时方向

$$(a_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,a_n(x_1,\cdots,x_n))$$

称为方程 (1.3) 在点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 处的 **特征方向**. 函数 u 沿着这个方向的方向导数就是

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{a_i}{(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}}=\frac{1}{(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}}\cdot\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

设

$$x_1 = x_1(t), \cdots, x_n = x_n(t) \tag{1.4}$$

是方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_n(x_1, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{1.5}$$

的解．则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

故若 $u = u(x_1, \cdots, x_n)$ 是方程 (1.3) 的解，则它沿着 (1.4) 化成了常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = c(x_1(t), \cdots, x_n(t), u).$$

常微分方程组 (1.5) 称为方程 (1.3) 的 **特征方程组**, 其解 (1.4) 在 $(x_1, \cdots, x_n)$ 空间的图象称为方程 (1.3) 的 **特征**. 常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_n(x_1, \cdots, x_n), \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = c(x_1, \cdots, x_n, u) \end{cases}$$

称为方程 (1.3) 的 **全特征方程组**, 其解在 $(x_1, \cdots, x_n, u)$ 空间的图象称为方程 (1.3) 的 **全特征**.

对于方程 (1.2), 可引进类似的概念．假定 $a_1, \cdots, a_n$ 不同时为零．对给定的某一函数

$$u = u(x_1, \cdots, x_n), \tag{1.6}$$

方向

$$(a_1(x_1, \cdots, x_n, u), \cdots, a_n(x_1, \cdots, x_n, u))$$

称为方程 (1.2) 在点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 处 **相应于特定函数** (1.6) **的特征方向**. 常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_1(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_n(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n)) \end{cases}$$

称为方程 (1.2)**相应于特定函数** (1.6) **的特征方程组**, 其解在 $(x_1,\cdots,x_n)$ 空间的图象称为方程 (1.2)**相应于特定函数** (1.6) **的特征**. 常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_1(x_1,\cdots,x_n,u), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_n(x_1,\cdots,x_n,u), \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=c(x_1,\cdots,x_n,u) \end{cases} \tag{1.7}$$

称为方程 (1.2) 的 **全特征方程组**, 其解在 $(x_1,\cdots,x_n,u)$ 空间的图象称为方程 (1.2) 的 **全特征**.

全特征方程组 (1.7) 与方程 (1.2) 的重要联系在于：方程 (1.2) 的积分曲面由它的全特征织出，即我们有下面的定理.

定理 1.1 *设 $a_i(x_1,\cdots,x_n,u), i=1,\cdots,n$ 和 $c(x_1,\cdots,x_n,u)$ 均于 $(x_1,\cdots,x_n,u)$ 空间的域 G 内连续可微，函数*

$$u=\Phi(x_1,\cdots,x_n) \tag{1.8}$$

于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 空间的域 D 内连续可微，且 $(x_1,\cdots,x_n,\Phi(x_1,\cdots,x_n))\in G$. 则曲面 (1.8) 是方程 (1.2) 的积分曲面的充要条件是：过其上每一点的全特征都有在该点邻近的一段位于其上.

证明 先证充分性. 设 $(x_1^0,\cdots,x_n^0,u^0)$ 是曲面 (1.8) 上任意一点，而

$$x_1=x_1(t),\cdots,x_n=x_n(t),\ u=u(t) \tag{1.9}$$

是方程 (1.2) 在 $t=\tau$ 时过此点的全特征. 当 $|t-\tau|\le h$ 时有

$$u(t)\equiv\Phi(x_1(t),\cdots,x_n(t)).$$

对 t 求导，由 (1.7) 得

$$\begin{aligned} & c(x_1(t),\cdots,x_n(t),u(t)) \\ \equiv\ & \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(x_1(t),\cdots,x_n(t)) \\ \equiv\ & \sum_{i=1}^n a_i(x_1(t),\cdots,x_n(t),u(t))\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x_1(t),\cdots,x_n(t)). \end{aligned}$$

特别当 $t=\tau$ 时有

$$c(x_1^0,\cdots,x_n^0,u^0)=\sum_{i=1}^n a_i(x_1^0,\cdots,x_n^0,u^0)\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x_1^0,\cdots,x_n^0).$$

由 $(x_1^0,\cdots,x_n^0,u^0)$ 的任意性即知 (1.8) 是方程 (1.2) 的积分曲面.

再证必要性. 设 (1.8) 是方程 (1.2) 的积分曲面, $(x_1^0,\cdots,x_n^0,u^0)$ 是其上任意一点, 而 (1.9) 是方程 (1.2) 在 $t=\tau$ 时过此点的全特征, 存在于 $|t-\tau|\le h$ 上. 考虑函数组

$$x_1=\varphi_1(t),\cdots,x_n=\varphi_n(t),\ u=\psi(t), \tag{1.10}$$

其中 $x_1=\varphi_1(t),\cdots,x_n=\varphi_n(t)$ 是方程 (1.2) 在 $t=\tau$ 时过点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的相应于特定函数 (1.8) 的特征, 即方程组

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_1(x_1,\cdots,x_n,\Phi(x_1,\cdots,x_n)),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_n(x_1,\cdots,x_n,\Phi(x_1,\cdots,x_n)) \end{cases}$$

满足初值条件

$$x_1(\tau)=x_1^0,\cdots,x_n(\tau)=x_n^0$$

的解, 不妨设它也存在于 $|t-\tau|\le h$ 上, 而

$$\psi(t)\equiv\Phi(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)). \tag{1.11}$$

只要 h 适当小, 就有

$$(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t),\psi(t))\in G,\quad |t-\tau|\le h.$$

从而有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} &\equiv \sum_{i=1}^n a_i(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t),\psi(t))\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))\\ &\equiv c(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t),\psi(t)).\end{aligned}$$

这说明 (1.10) 也是全特征方程组 (1.7) 的解, 并且在 $t=\tau$ 时也经过 $(x_1^0,\cdots,x_n^0,u^0)$. 由方程组 (1.7) 的初值问题解的唯一性, 有

$$x_1(t)\equiv\varphi_1(t),\cdots,x_n(t)\equiv\varphi_n(t),\ u(t)\equiv\psi(t).$$

由此及 (1.11) 得到

$$u(t)\equiv\Phi(x_1(t),\cdots,x_n(t)),\quad |t-\tau|\le h,$$

这就是所要证明的. □

在以下的讨论中，我们还要涉及通解的概念．一个一阶偏微分方程的 **通解**，我们将理解为含某些任意元素的解的表达式．当适当选取所含任意元素时，除个别例外，可以得到方程的任一解．看下面的例子．

例 1.1 设自变量是 x, y, 未知函数是 u. 则方程

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

的通解是 $u = \omega(x)$, 此处 $\omega(x)$ 是 x 的任意函数.

例 1.2 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

经变量变换

$$x + y = \xi,\ x - y = \eta,\ u(x, y) = v(\xi, \eta)$$

就化成

$$2\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

因此通解为 $v = \omega(\xi)$, 即

$$u = \omega(x + y),$$

其中 ω 是任意可微函数.

习　题

已知 x, y 是自变量， u 是未知函数，解下列方程：

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

(2) $\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 其中 α 和 β 是两个不全为零的实数.