§ 2 一阶齐次线性偏微分方程

本节讨论一阶齐次线性偏微分方程

$$a_1(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+a_n(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \tag{2.1}$$

它的特征方程组和全特征方程组依次是

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=a_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,n \tag{2.2}$$

和

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=a_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,n,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0.\end{cases}$$

若方程组 (2.2) 的解为

$$x_1=x_1(t),\cdots,x_n=x_n(t),\ t\in I, \tag{2.3}$$

则方程 (2.1) 的全特征为

$$x_1=x_1(t),\cdots,x_n=x_n(t),\ u(t)=c,\ t\in I. \tag{2.4}$$

很明显，如果函数 $\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ 连续可微，且不恒等于某个常数，则全特征 (2.4) 位于曲面 $u=\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ 上当且仅当

$$\Phi(x_1,\cdots,x_n)=c \tag{2.5}$$

是特征方程组 (2.2) 的首次积分．因此由定理 1.1 直接可得：

定理 2.1 *设 $a_i(x_1,\cdots,x_n), i=1,\cdots,n$ 和 $\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ 均于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 空间的域 D 内连续可微，$\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ 不恒等于一常数．则 $u=\Phi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 (2.1) 的解当且仅当 (2.5) 是特征方程组 (2.2) 的首次积分．*

这个定理表明，求解 (2.1) 等同于求它的特征方程组 (2.2) 的首次积分．

如果已知特征方程组 (2.2) 的 $n-1$ 个相互独立的首次积分：

$$\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)=c_i,\quad i=1,\cdots,n-1, \tag{2.6}$$

则对任意 $n-1$ 元连续可微函数 $\omega(c_1,\cdots,c_{n-1})$, 只要把 (2.6) 代入后有意义，函数

$$u=\omega(\Phi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\Phi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)) \tag{2.7}$$

必是方程 (2.1) 的解．这个解的表达式中是否包含了方程 (2.1) 的全部解呢？至少在域 D 的每一点附近，回答是肯定的．

定理 2.2 *设 $a_i(x_1,\cdots,x_n), i=1,\cdots,n$ 于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 空间的域 D 内连续可微，且处处不同时为零．若 (2.6) 是特征方程组 (2.2) 在域 D 上的 $n-1$ 个相互独立的首次积分，则在 D 的每一点附近，方程 (2.1) 的全部解的共同表达式是 (2.7)，式中 ω 是一个任意的 $n-1$ 元连续可微函数．*

证明 只须证明，对任意一点 $P_0\in D$, 有邻域 $U\subset D$, 使得对方程 (2.1) 在 U 上的任一解 $u=\psi(x_1,\cdots,x_n)$, 都存在连续可微函数 $\omega(u_1,\cdots,u_{n-1})$, 于 U 上有

$$\psi(x_1,\cdots,x_n)\equiv\omega(\Phi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\Phi_{n-1}(x_1,\cdots,x_n)). \tag{2.8}$$

因为 (2.6) 在 D 上相互独立，雅可比矩阵 $\frac{\partial(\Phi_1,\cdots,\Phi_{n-1})}{\partial(x_2,\cdots,x_n)}$ 的秩处处为 $n-1$, 我们不妨设在点 P_0 的邻域 U 上雅可比行列式

$$J=\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_{n-1})}{D(x_2,\cdots,x_n)}\neq 0.$$

由此知从函数组

$$u_i=\Phi_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,n-1$$

可解出连续可微的反函数

$$x_i=H_i(x_1,u_1,\cdots,u_{n-1}),\quad i=2,\cdots,n. \tag{2.9}$$

我们的目的是要找一个使 (2.8) 成立的连续可微函数 $\omega(u_1,\cdots,u_{n-1})$. 为此，我们考虑由下式定义的关于变元 $x_1,u_1,\cdots,u_{n-1}$ 的函数：

$$\begin{aligned}&\omega(x_1,u_1,\cdots,u_{n-1})\\ =\;&\psi(x_1,H_2(x_1,u_1,\cdots,u_{n-1}),\cdots,H_n(x_1,u_1,\cdots,u_{n-1})).\end{aligned}$$

假如能证明这样定义的函数 ω 其实不依赖于 x_1, 则函数 ω 便符合我们的要求.

我们有

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial H_n}{\partial x_1}. \tag{2.10}$$

在恒等式

$$u_i=\Phi_i(x_1,H_2(x_1,u_1,\cdots,u_{n-1}),\cdots,H_n(x_1,u_1,\cdots,u_{n-1})),\quad i=1,\cdots,n-1$$

两端对 x_1 求导得到

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial H_n}{\partial x_1}=0,\quad i=1,\cdots,n-1.$$

由此解出

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_2}{\partial x_1} &= -\frac{1}{J}\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_{n-1})}{D(x_1,x_3,\cdots,x_n)},\\
\frac{\partial H_i}{\partial x_1} &= -\frac{1}{J}\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_{n-1})}{D(x_2,\cdots,x_{i-1},x_1,x_{i+1},\cdots,x_n)},\quad i=3,\cdots,n-1,\\
\frac{\partial H_n}{\partial x_1} &= -\frac{1}{J}\frac{D(\Phi_1,\cdots,\Phi_{n-1})}{D(x_2,\cdots,x_{n-1},x_1)}.
\end{aligned}$$

代入 (2.10) 便得

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{1}{J}\frac{D(\psi,\Phi_1,\cdots,\Phi_{n-1})}{D(x_1,\cdots,x_n)}.$$

注意到 $(a_1,\cdots,a_n)$ 是代数方程组

$$\begin{cases} a_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=0,\\ a_1\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_n}=0,\quad i=1,\cdots,n-1\end{cases}$$

的非零解，故其系数行列式必为零，从而 $\frac{\partial\omega}{\partial x_1}=0$. 定理到此证完. □

为了求特征方程组 (2.2) 的首次积分，将方程组写成对称形式

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1(x_1,\cdots,x_n)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{a_n(x_1,\cdots,x_n)}$$

比较方便, 因为这样便于运用比例的一些性质. 注意, 当分母为零时视分子为零.

例 2.1 解方程

$$xz\frac{\partial u}{\partial x}+yz\frac{\partial u}{\partial y}-(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{2.11}$$

解　写出对称形式的特征方程组:

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=-\frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2}. \tag{2.12}$$

从

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}$$

中消去 z, 移项，积分，化简，得到一个首次积分:

$$\Phi_1=\frac{y}{x}=c_1. \tag{2.13}$$

第二个首次积分可以这样求：将 (2.12) 改写，并利用比例性质，有

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{2x^2z} = \frac{\mathrm{d}y^2}{2y^2z} = \frac{\mathrm{d}z^2}{-2z(x^2+y^2)} = \frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{0}, \tag{2.14}$$

由此立即得出另一个首次积分

$$\Phi_2 = x^2+y^2+z^2 = c_2. \tag{2.15}$$

如果看不出 (2.14) 这一步，则可以利用 (2.13), 即以 $y = c_1x$ 代入

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = -\frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2},$$

经整理可得

$$(1+c_1^2)x\mathrm{d}x + z\mathrm{d}z = 0.$$

积分后再以 $c_1 = \frac{y}{x}$ 代入，也得到 (2.15). 易见 (2.13) 和 (2.15) 相互独立，于是原方程的通解为

$$u = \omega\left(\frac{y}{x}, x^2+y^2+z^2\right).$$

□

例 2.2 求例 2.1 中的方程满足初值条件

$$u|_{x=1} = 2y + z^2 \tag{2.16}$$

的解.

解 我们不从通解下手，而是利用已求出的两个独立的首次积分 (2.13) 和 (2.15). 由 Φ_1, Φ_2 的表达式，有

$$\Phi_1|_{x=1} = y, \quad \Phi_2|_{x=1} = 1+y^2+z^2.$$

从初值条件 (2.16) 知，我们所要求的解 u 当 $x=1$ 时与 Φ_1, Φ_2 之间应满足下列关系：

$$\begin{aligned} u|_{x=1} &= 2y+z^2 = 2\Phi_1|_{x=1} + \Phi_2|_{x=1} - 1 - (\Phi_1|_{x=1})^2 \\ &= \Phi_2|_{x=1} - (\Phi_1|_{x=1} - 1)^2. \end{aligned}$$

由此可见所要求的解为

$$u = x^2+y^2+z^2 - \left(\frac{y}{x} - 1\right)^2.$$

□

习　题

求下列方程的通解和满足初值条件的特解:

(1) $(x^2-y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+2xy\frac{\partial u}{\partial y}=0,$
$u|_{x=0}=1+\sqrt{y};$

(2) $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0,$
$u|_{z=0}=y^3;$

(3) $x(y^2+z^2)\frac{\partial u}{\partial x}+y(z^2+x^2)\frac{\partial u}{\partial y}+z(y^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0,$
$u|_{x=1}=y^4+z^4;$

(4) $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+z^2\frac{\partial u}{\partial y}+2xz\frac{\partial u}{\partial z}=0,$
$u|_{x=1}=y.$