§3 一阶拟线性偏微分方程

本节讨论一阶拟线性偏微分方程 (1.2), 即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=c(x_1,\cdots,x_n,u). \tag{3.1}$$

一阶线性和半线性方程是它的特殊情形．和前面一样，我们假定函数 $a_i(x_1,\cdots,x_n,\ u),i=1,\cdots,n$ 和 $c(x_1,\cdots,x_n,u)$ 均于 $(x_1,\cdots,x_n,u)$ 空间的域 D 内连续可微，且 $a_i(x_1,\cdots,x_n,u),i=1,\cdots,n$ 处处不同时为零.

方程 (3.1) 可按下述方式化成齐次线性方程来求解．设想方程 (3.1) 的解由隐函数方程

$$V(x_1,\cdots,x_n,u)=0 \tag{3.2}$$

确定，其中 $\frac{\partial V}{\partial u}\neq 0$. 按隐函数的微分法

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial V}{\partial u},\quad i=1,\cdots,n.$$

代入 (3.1), 得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_i}+c(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0. \tag{3.3}$$

它是一个以 $x_1,\cdots,x_n,u$ 为自变量， V 为未知函数的齐次线性方程．反之也很明显．若 $V=V(x_1,\cdots,x_n,u)$ 是方程 (3.3) 的解，且 $\frac{\partial V}{\partial u}\neq 0$, 则由 (3.2) 所确定的隐函数 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$ 是 (3.1) 的解，即 (3.2) 是方程 (3.1) 的隐式解．若

$$\Phi_i(x_1,\cdots,x_n,u)=c_i,\quad i=1,\cdots,n$$

是 (3.3) 的特征方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=a_i(x_1,\cdots,x_n,u),\quad i=1,\cdots,n,\\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=c(x_1,\cdots,x_n,u)\end{cases}$$

的 n 个相互独立的首次积分，则方程 (3.3) 的通解为

$$V=\omega(\Phi_1(x_1,\cdots,x_n,u),\cdots,\Phi_n(x_1,\cdots,x_n,u)),$$

其中 ω 是任意的 n 元连续可微函数．根据上面的讨论，

$$\omega(\Phi_1(x_1,\cdots,x_n,u),\cdots,\Phi_n(x_1,\cdots,x_n,u))=0$$

便是 (3.1) 的隐式通解.

例 3.1 解方程

$$(1+\sqrt{u-x-y})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2. \tag{3.4}$$

解 对应的齐次线性方程 (3.3) 为

$$(1+\sqrt{u-x-y})\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+2\frac{\partial V}{\partial u}=0, \tag{3.5}$$

而它的对称形式特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{u-x-y}}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}u}{2}.$$

容易求出两个相互独立的首次积分

$$u-2y=c_1,\quad y+2\sqrt{u-x-y}=c_2.$$

因此原方程的隐式通解为

$$\omega(u-2y,y+2\sqrt{u-x-y})=0,$$

其中 ω 是任意的二元连续可微函数. □

例 3.2 求例 3.1 中的方程满足初值条件

$$u|_{y=0}=x \tag{3.6}$$

的解.

解 在例 3.1 中已求出 (3.5) 相应的两个相互独立的首次积分

$$\Phi_1=u-2y=c_1,\quad \Phi_2=y+2\sqrt{u-x-y}=c_2.$$

为了求方程 (3.4) 满足初值条件 (3.6) 的解 $u(x,y)$, 只须求方程 (3.5) 满足下列条件的解 $V(x,y,u)$:

$$V|_{y=0,u=x}=0.$$

$\Phi_2(x,y,u)$ 正好满足这一条件. 从

$$\Phi_2=y+2\sqrt{u-x-y}=0$$

解出 u 就得到方程 (3.4) 满足初值条件 (3.6) 的解:

$$u=\frac{y^2}{4}+y+x.$$

□

从几何上看，解拟线性方程的初值问题，就是求方程之经过给定的初始曲线 (面) 的积分曲面. 如 §1 所指出，这一积分曲面可由经过初始曲线 (面) 的全特征编织出来. 以

$$\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y,u), \tag{3.7}$$

$$u|_{x=x_0}=g(y) \tag{3.8}$$

为例. 假设 $b(x,y,u)$ 和 $c(x,y,u)$ 在所考虑的某域 G 内连续可微， $g(y)$ 在某区间 $c\le y\le d$ 上连续可微. 方程 (3.7) 的全特征方程组是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b(x,y,u),\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=c(x,y,u).$$

它可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=b(x,y,u),\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=c(x,y,u). \tag{3.9}$$

对初始曲线 $\Gamma:(x_0,y,g(y)),c\le y\le d$ 上的任意一点 $(x_0,y_0,g(y_0)),y_0\in[c,d]$, 方程组 (3.9) 过此点的解记为

$$y=\varphi(x,y_0,g(y_0)),\quad u=\psi(x,y_0,g(y_0)). \tag{3.10}$$

如果对应于所有的 $y_0\in[c,d]$, 积分曲线 (3.10) 编织出一光滑曲面，则这个光滑曲面就是我们所要求的积分曲面.

按记号 $\varphi(x,y_0,u_0)$ 的含义， $\varphi(x_0,y_0,u_0)=y_0$, 故

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}(x,y_0,u_0)\right|_{x=x_0}=1,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}(x,y_0,u_0)\right|_{x=x_0}=0,$$

从而

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}(x,y_0,g(y_0))\right|_{x=x_0}=1.$$

因此至少当 $|x-x_0|$ 充分小时， $\varphi(x,y_0,g(y_0))$ 对 y_0 的微商不等于零. 对于这样的 x, 我们可从 (3.10) 第一式把 y_0 解出： $y_0=H(x,y)$. 再将它代入 (3.10) 的第二式所得到的函数

$$u=\psi(x,H(x,y),g(H(x,y)))$$

就是初值问题 (3.7), (3.8) 的解.

应该特别强调指出的是，按上述方式一般只能得到初值问题 (3.7), (3.8) 的局部解，即对使 $|x-x_0|$ 充分小的 x 有定义的解. 这是因为从 (3.10) 第一式解

出的隐函数 $y_0=H(x,y)$ 一般不能在大范围存在，从而由积分曲线 (3.10) 所织出的曲面一般不再保持光滑，而对应的解可能产生某种程度的间断. 这一极可注意的现象表明，要想在大范围内研究拟线性方程，就必须将解的概念加以拓广，即引进广义解 (容许有间断的解) 的概念. 研究广义解的重要意义，从气体动力学，浅水理论，燃烧爆炸理论等力学分支中都能得到有力的说明.

还要强调指出，上述间断现象对于线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=c(x,y)u+f(x,y)$$

是不会产生的. 这是因为与 (3.9) 对应的方程组是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=b(x,y),\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=c(x,y)u+f(x,y).$$

从曲线 $\Gamma:(x_0,y,g(y)),\quad c\le y\le d$ 上点 $(x_0,y_0,g(y_0))$ 出发的积分曲线是

$$y=\varphi(x,y_0),\quad u=\psi(x,y_0,g(y_0)).$$

这里的 $\varphi(x,y_0)$ 中不含 $g(y_0)$. 而由第四章 §6 知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}(x,y_0)=\exp\left\{\int_{x_0}^{x}\frac{\partial b}{\partial y}(s,\varphi(s,y_0))\mathrm{d}s\right\}\neq 0$$

对所有 x 成立.

习　题

1. 求下列方程的通解和满足指定条件的特解：

(1) $(x^2-yz)\frac{\partial z}{\partial x}+(y^2-zx)\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-xy$,

$z|_{x=0}=2y$;

(2) $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$,

$z=z(x,y)$ 过曲线： $x=a,\ y^2+z^2=a^2$;

(3) $y\frac{\partial z}{\partial x}+z=0$,

$z|_{x=2}=y$;

(4) $(mz-ny)\frac{\partial z}{\partial x}+(nx-lz)\frac{\partial z}{\partial y}=ly-mx,\ l,m,n$ 是不全为零的常数,

$z=z(x,y)$ 过曲线： $x=a,y^2+z^2=a^2$;

(5) $z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}-y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$,

$z=z(x,y)$ 过曲线： $xy=4,z=2$.

2. 用特征线法求下列初值问题的解：

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=u$,

$u=u(x,y,z)$ 过流形： $x=s+t, y=s-t, z=1, u=st$;

(2) $3(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$,

$z=z(x,y)$ 过曲线： $x=0, y=s, z=s$;

(3) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$,

$z=z(x,y)$ 过曲线： $x=s, y=3s, z=3s$;

(4) $2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}+5=0$,

$z=z(x,y)$ 过曲线： $x=a_1s, y=a_2s, z=a_3s, a_1, a_2$ 为满足 $3a_1-2a_2\neq 0$ 的常数.