§4 广义解的概念 *

在上一节最后我们曾指出，要想在大范围内研究拟线性方程，就必须将解的概念加以推广．下面就最简单的守恒律型方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u)}{\partial y}=0 \tag{4.1}$$

来说明如何引进广义解的概念，这里 $f(u)$ 是对所有 u 有定义的连续可微函数．迄今我们谈到的解（相对于下面要引进的广义解，我们将称之为 **古典解**）是在所论域内每点都满足方程的函数，它描述的是逐点的性质．为了拓广解的概念，就要将 "逐点满足方程 " 扩充为 "广义地满足方程 ", 而将着眼点放在整体性质上．很自然的一种想法是用一个积分形式的方程来代替微分方程，而把满足这一积分形式的方程的函数定义为微分方程的广义解．

设 $u(x,y)$ 是方程 (4.1) 在域 D 内的古典解．以 $C_0^1(D)$ 表示所有在 D 内连续可微，而在 D 内某有界闭域外恒为零的函数全体．将 $u(x,y)$ 代入 (4.1) 后用任一函数 $\varphi(x,y)\in C_0^1(D)$ 乘两端，然后在 D 上积分，首先有

$$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u)}{\partial y}\right)\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \tag{4.2}$$

由于 $\varphi(x,y)$ 在 D 的某有界闭域外为零，上式左端的积分有意义．显然

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u)}{\partial y}\right)\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =\ &\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)+\frac{\partial}{\partial y}(f(u)\varphi)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+f(u)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对右端第一个积分利用格林公式，并注意到 $\varphi(x,y)$ 在 D 的边界附近为零，就知它必为零．由此我们得到

$$\iint_D\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+f(u)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \tag{4.3}$$

这样一来，我们就把 (4.2) 左端积分号下加在 u 和 $f(u)$ 上的微分运算转移到了 φ 上．值得注意的是，为使 (4.1) 或 (4.2) 有意义，函数 u 必须可微，而为使 (4.3) 有意义，函数 u 甚至不必要求连续．于是我们自然引进下面的定义．

定义 4.1 *函数 $u(x,y)$ 称为方程 (4.1) 在域 D 内的* **广义解**, *如果对任何 $\varphi(x,y)\in C_0^1(D)$, 积分等式 (4.3) 恒成立．*

上面的推导表明：方程 (4.1) 的古典解必是它的广义解．

假设 $u(x,y)$ 是方程 (4.1) 在域 D 内的分片光滑广义解，这里分片光滑是指 D 内存在有限条方程形如 $y=y(x), x_1<x<x_2$ 的光滑曲线．当点 (x,y) 从 D 内这种曲线的每一侧趋于曲线上的点时， $u(x,y)$ 的极限都存在，而在这有限条曲线以外的地方， $u(x,y)$ 连续可微．可以证明，这样的广义解 $u(x,y)$ 在它的光滑域内是方程 (4.1) 的古典解．为此，任取 D 的子域 D', 在其内 $u(x,y)$ 连续可微．于是对任何 $\varphi(x,y)\in C_0^1(D')$, 自然有

$$\iint_{D'}\left(u\frac{\partial \varphi}{\partial x}+f(u)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

从而利用格林公式可得

$$\iint_{D'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u)}{\partial y}\right)\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由此，据函数 $\varphi(x,y)\in C_0^1(D')$ 的任意性 *, 就知在 D' 内，$u(x,y)$ 必满足方程 (4.1).

设 $y=y(x)$ 为 $u(x,y)$ 的一条间断线．我们来考察广义解 $u(x,y)$ 在它上面的性质．设 $(x_0,y_0)(y_0=y(x_0))$ 为它上面任一点．由闭曲线

$$\Gamma_\delta:\quad x=x_0+\delta,\ x=x_0-\delta,\ y=y(x_0)+\alpha,\ y=y(x_0)-\alpha$$

所围成的域，记为 D_δ．曲线 $y=y(x)$ 将 D_δ 分成两部分：D_δ^+ 和 D_δ^-, 它们分别对应于 $y>y(x)$ 和 $y<y(x)$. 对任意 $\varphi(x,y)\in C_0^1(D_\delta)$, 注意到在 D_δ^+ 和 D_δ^- 上，$u(x,y)$ 满足方程 (4.1), 利用格林公式，我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_{D_\delta}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\ &\iint_{D_\delta}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)+\frac{\partial}{\partial y}(f(u)\varphi)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\ &\iint_{D_\delta^+}+\iint_{D_\delta^-}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)+\frac{\partial}{\partial y}(f(u)\varphi)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=\ &\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(u(x,y(x)_+)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}-f(u(x,y(x)_+))\right)\varphi(x,y(x))\mathrm{d}x\\
&-\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(u(x,y(x)_-)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}-f(u(x,y(x)_-))\right)\varphi(x,y(x))\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

令 $\alpha\to 0$. 则上式左端的积分趋于零，于是得到

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(u(x,y(x)_+)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}-f(u(x,y(x)_+))\right)\varphi(x,y(x))\mathrm{d}x\\
-\ &\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left(u(x,y(x)_-)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}-f(u(x,y(x)_-))\right)\varphi(x,y(x))\mathrm{d}x=0.
\end{aligned}$$

由此据函数 $\varphi(x,y)\in C_0^1(D_\delta)$ 的任意性，就知在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上，特别地，在点 x_0 处

$$u(x,y(x)_+)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}-f(u(x,y(x)_+))=u(x,y(x)_-)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}-f(u(x,y(x)_-)),$$

即

$$\omega(u^+-u^-)=f(u^+)-f(u^-),\tag{4.4}$$

其中 $\omega=\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}, u^\pm=u(x,y(x)_\pm)$. (4.4) 称为 **兰金** (Rankine)- **雨果尼奥** (Hugoniot) **条件**.

综上所述，我们证明了方程 (4.1) 的分片光滑广义解在其光滑域内按通常意义满足方程 (4.1), 而在间断线上满足条件 (4.4).

---

*记 $\psi(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u)}{\partial y}$. 假设在某点 $(x_0,y_0)\in D',\psi(x,y)\neq 0$. 为确定计，设 $\psi(x_0,y_0)>0$. 由连续性知，当 $\delta>0$ 充分小时，在 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ 内，必有 $\psi(x,y)>0$. 令

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\delta^2)^2, & (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

易见 $\varphi(x,y)\in C_0^1(D')$. 于是应有

$$\iint_{D'}\psi\cdot\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

但这显然不可能．可见在 D' 内，$\psi(x,y)$ 处处为零.

反过来，不难证明：在光滑域内按通常意义满足方程 (4.1), 而在间断线上满足条件 (4.4) 的分片光滑函数必是方程 (4.1) 的广义解.

下面考虑方程 (4.1) 的初值问题，初值条件为

$$u|_{x=0} = g(y), \tag{4.5}$$

其中 $g(y)$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上已知函数. 假定它至少是分片连续的，并且有界 (其实还可更一般).

定义 4.2 *函数 $u(x, y)$ 称为初值问题 (4.1), (4.5) 在域 $D = (0, l) \times (-\infty, \infty)$ (l 为某一给定的正数) 上的广义解，如果它是方程 (4.1) 在域 D 上的广义解，且在 $g(y)$ 的连续点处按通常意义取初值.*

需要特别指出的是，与古典解的情形不同，初值问题的广义解不一定唯一，换言之，仅有初值条件不足以确定广义解. 例如，我们容易验证：对任何常数 $\alpha > 1$, 函数

$$u_\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & y \le \frac{1-\alpha}{2}x, \\ -\alpha, & \frac{1-\alpha}{2}x < y \le 0, \\ \alpha, & 0 < y \le \frac{\alpha-1}{2}x, \\ -1, & \frac{\alpha-1}{2}x < y \le x \end{cases}$$

都是同一初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}u^2\right) = 0, \\ u|_{x=0} = g(y) = \begin{cases} 1, & y \le 0, \\ -1, & y > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{4.6}$$

的广义解. 由此可见，为了确定初值问题的广义解，还需要某种附加条件. 在气体动力学里，这样的条件就是 **熵增加条件**. 对于作为气体动力学模型的方程 (4.1), 假如 $f(u)$ 是 u 的凸函数，即 $f''(u) \neq 0$, 则在间断线上相应的条件当 $f''(u) > 0$ 时是

$$u^+ < u^-, \tag{4.7}$$

而当 $f''(u) < 0$ 时则是

$$u^+ > u^-. \tag{4.8}$$

在上面的例子中， $f(u) = \frac{u^2}{2}, f''(u) = 1 > 0$, 这时应附加条件 (4.7). 容易看出，只有对应于 $\alpha = 1$ 的函数 $u_\alpha(x, y)$ 才满足条件 (4.7). 因此，在初值问题 (4.6) 的广义解族 $u_\alpha(x, y)$ 中满足条件 (4.7) 的只有

$$u(x, y) = \begin{cases} 1, & y \le 0, \\ -1, & y > 0. \end{cases}$$

直线 $y = 0$ 是这个广义解的间断线.

上述例子中讨论的这种初值问题是黎曼 (Riemann, 1826-1866)1860 年作为一个典型问题提出的，人们称之为 **黎曼问题**. 现在考虑模型方程 (4.1) 的黎曼问题，初值条件为

$$u|_{x=0} = \begin{cases} u_1, & y \le 0, \\ u_2, & y > 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

其中 u_1, u_2 为常数.

利用特征线法不难构造出黎曼问题 (4.1), (4.9) 满足附加条件 (4.7) 或 (4.8) 的广义解．假设

$$f''(u) > 0. \tag{4.10}$$

首先，利用在 $y < 0$ 上的初值 u_1, 可在域

$$D^- : \quad x > 0, \quad y < f'(u_1)x$$

上构造出古典解，它恒等于 u_1; 利用在 $y > 0$ 上的初值 u_2, 可在域

$$D^+ : \quad x > 0, \quad y > f'(u_2)x$$

上构造出古典解，它恒等于 u_2.

如果 $u_1 > u_2$, 则由 (4.10) 知 $f'(u_1) > f'(u_2)$, 因而域 D^- 和 D^+ 有公共部分

$$x > 0, \quad f'(u_2)x < y < f'(u_1)x. \tag{4.11}$$

在这个角域上，我们已构造出两个古典解．所要求的广义解在这个角域上将产生间断，在间断线上应满足条件 (4.4)．我们自然用

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$$

来确定 (经过原点 $(0,0)$ 的) 间断线，它就是直线

$$y = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}x.$$

这条直线显然位于角域 (4.11) 中．令

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1, & y \le \frac{f(u_2)-f(u_1)}{u_2-u_1}x, \\ u_2, & y > \frac{f(u_2)-f(u_1)}{u_2-u_1}x. \end{cases} \tag{4.12}$$

则由于在间断线上， $u(x,y)$ 满足条件 (4.4), 且 $u^+ < u^-$, 故函数 (4.12) 是所要求的黎曼问题 (4.1), (4.9) 的广义解 (图 4.1).

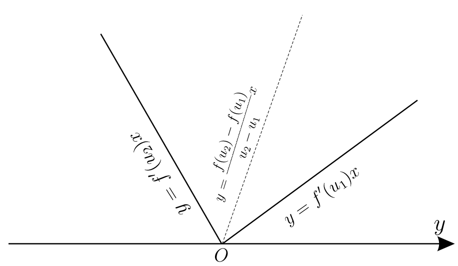

图 4.1: $u_1 > u_2$ 的情形

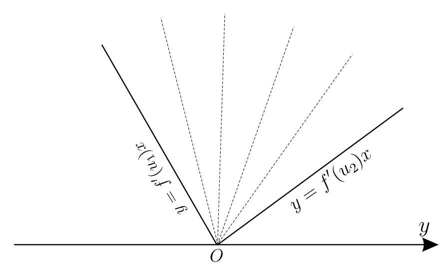

图 4.2: $u_1 < u_2$ 的情形

如果 $u_1 < u_2$, 则用上述方法只能在角域

$$x > 0, \quad f'(u_1)x < y < f'(u_2)x \tag{4.13}$$

以外的地方构造出古典解．为了在这个角域上补充构造所要求的解，我们考虑全特征

$$y = f'(v_0)x, \quad u = v_0,$$

其中 $u_1 \le v_0 \le u_2$. 在特征 $y = f'(v_0)x$ 上，令 $u = v_0$, 即 $u = h(\frac{y}{x})$, 这里 $h(s)$ 为 $f'(u)$ 的反函数. 总之，我们定义

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1, & y \le f'(u_1)x, \\ h(\frac{y}{x}), & f'(u_1)x < y \le f'(u_2)x, \\ u_2, & y > f'(u_2)x. \end{cases}$$

容易看出， $u(x,y)$ 就是在 $u_1 < u_2$ 的情形下所要求的黎曼问题 (4.1), (4.9) 的广义解 (图 4.2).

从以上的构造我们看到，在两种不同情形下，所得到的广义解的结构完全不同. 当 $u_1 > u_2$ 时，广义解有一条间断线，称为 **激波**. 当 $u_1 < u_2$ 时，初值间断顷刻消失，广义解在 $x > 0$ 时处处连续，只是它的导数在角域 (4.13) 的边界上有间断 (称为 **弱间断**). 这时我们说广义解在角域 (4.13) 上具有以 $(0,0)$ 为中心的 **中心简单波**.

利用上述方法，我们还可对分段为常数的初值构造广义解. 进而经过一个逼近过程，对一般初值得到广义解，从而证明初值问题广义解的存在性. 证明广义解的存在性还有多种其它方法. 除了存在性，还需研究唯一性以及广义解的其它性质.

关于一阶拟线性方程式广义解的问题，理论上早已完善. 一阶拟线性方程组广义解的研究，在理论和应用上都更为重要，其中许多问题有待解决.