《常微分方程》试题(一)参考答案

一．单项选择题： 每小题 2 分，共 10 分）

1．C　2．C　3．A　4．D　5．D

二．填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1． $2xy' = y - x$

2． $y_1\int y_1^{-2}e^{-\int adx}dx$

3． $e^{\lambda_0 x}$， $xe^{\lambda_0 x}$， $\cdots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$

4． (1） $y_1,\cdots,y_n$ 是该方程的解， (2） $y_1,\cdots,y_n$ 线性无关

5．不稳定结点

三．计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1．令 $y = ux$ 得 $x\dfrac{du}{dx} = -u^2$　**（4 分）**

1） $u = 0$ 是解，从而 $y = 0$ 也是原方程的解**（5 分）**

2） $u \neq 0$ 时有 $\dfrac{-du}{u^2} = \dfrac{dx}{x}$　**（7 分）**

积分得 $u = \dfrac{1}{\ln|x| + c}$　**（9 分）**

从而 $y = \dfrac{x}{\ln|x| + c}$　**（10 分）**

2． 因为 $\dfrac{\partial}{\partial y}(y - 3x^2) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x - 4y)$

故该方程是全微分方程　**（4 分）**

选特殊路径积分得原函数 $U(x,y) = -2y^2 - x^3 + xy$　**（8 分）**

从而通积分为 $-2y^2 - x^3 + xy = c$**（10 分）**

3．特征方程是 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

特征根是 3，-1**（3 分）**

齐次方程的通解是 $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$ **（5 分）**

由比较系数法或常数变易法可得一特解，例如$-x+1/3$（**9分**）

从而通解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-x+1/3$ （**10分**）

4． 特征根为 1， 2， 3（**3分**）

1 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$（**5分**）

2 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$（**7分**）

3 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$（**9分**）

故$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}+c_3\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}e^{3t}$（**10分**）

四．该方程是开莱罗方程

通解为 $y=cx+1/c$（**6分**）

求包络得奇解 $y^2=4x$（**10分**）

五．该方程右端函数在全平面上满足解的存在唯一性定理和延拓定理的条件（**2分**）

此方程的通解为 $y=\dfrac{1+ce^x}{1-ce^x}$（**5分**）

过$(\ln 2,-3)$的解为 $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$（**7分**）

解的存在区间为$(0,+\infty)$（**10分**）

六．取定正函数$V(x,y)=x^4+y^2$（**4分**）

则全导数$\dfrac{dV}{dt}=4(x^6+y^6)$ 也是定正函数（**8分**）

由 Liapunov 稳定性定理知 0 解是不稳定的（**10分**）

七．设$x(t)$是该方程的任一解，满足 $x(t_0)=x_0,t_0\in[0,+\infty)$ 从而

$$x(t) = x_0 e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} f(s) e^{s-t} ds$$ **（4 分）**

只须证 $x(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 有界

设 $|f(t)| \le M, t \in [0, +\infty)$

则 $t \in [t_0, +\infty)$ 时

$$|x(t)| \le |x_0| + Me^{-t} \int_{t_0}^{t} e^{s} ds \le |x_0| + M$$ **（10 分）**