《常微分方程》试题 (十) 参考答案

一、 (1) 变量分离得通解为 $\sin y\cos x = c, c\in \mathbf{R}$（ 10 分 ）。

(2) 将方程改写为 $d(xy)-3x^3y^2dy=0$

取积分因子 $(xy)^{-3}$（ 5 分 ），乘方程得

$d[-(xy)^{-2}-6\ln y]=0$

其通解为 $(xy)^{-2}+6\ln y=c$ ，还有特解 $y=0$（ 10 分 ）。

(3) 齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ ，（ 4 分 ）

应用常数变易法，设 $y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$ 为 $y''+y=\tan x$ 的特解，

代入原方程解之得特解 $-\cos x\ln|\sec x+\tan x|$（ 8 分 ）

于是原方程的通解为

$y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\ln|\sec x+\tan x|$（ 10 分 ）

二、特征方程是 $(\lambda-1)(\lambda^2+1)=0$,

特征根是 $\lambda_1=1, \lambda_2=i, \lambda_3=-i$（ 3 分 ），

$\lambda_1=1$ 对应的解是 $X_1=(0,1,1)e^t$,

$\lambda_2=i$ 对应的特征向量是 $(2,2,3+i)$,

对应的解是 $(2,2,3+i)e^{it}$ ，其实、虚部

$X_2=(2,2,3)\cos t-(0,0,1)\sin t, X_3=(0,0,1)\cos t+(2,2,3)\sin t$

便是所求的另两个解。（ 12 分 ），

通解是

$(x,y,z)=C_1(0,1,1)e^t+C_2[(2,2,3)\cos t-(0,0,1)\sin t]+C_3[(0,0,1)\cos t+(2,2,3)\sin t]$ （ 15 分 ）

三、容易求得该问题的解为 $y=x\ln x$,

其最大存在区间是 $(0,+\infty)$.（ 5 分 ）

四、该系统的奇点是 $M_1(0,-2), M_2(2,2), M_3(-1,-1)$，（ 2 分）

线性化后的系数矩阵是

$$A(x,y)=\begin{bmatrix}-2x & 1\\ 4x-2y & -2x\end{bmatrix}$$

$A(0,-2)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

对应的特征方程是 $\lambda^2-4=0$

所以 $(0,-2)$ 是鞍点，$(0,-2)$ 周围的轨线分布草图是（略）（ 9 分）

$A(2,2)=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 4 & -4\end{bmatrix}$

对应的特征方程是 $(\lambda+2)(\lambda+6)=0$

所以 $(2,2)$ 是稳定结点，$(2,2)$ 周围的轨线分布草图是（略）（ 12 分）

$A(-1,-1)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

对应的特征方程是 $\lambda^2-4\lambda+6=0$

所以 $(-1,-1)$ 是不稳定焦点，$(-1,-1)$ 周围的轨线分布草图是（略）

五、证明：取 Liapunov 函数 $V(x,y)=x^4+y^2$，（ 4 分）有

$\frac{dV(x,y)}{dt}=-4x^6-4y^4$（ 8 分）

故知零解是渐近稳定的。（ 10 分）

六、方程 $x''+x=\cos t$ 的通解是

$x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2}t\sin t$（ 6 分）

显然，上式含有非周期项 $\frac{1}{2}t\sin t$，而其它项是周期的，（ 8 分）

故方程 $x''+x=\cos t$ 无周期解.（ 10 分）

七、应用微元法可知 t 时刻容器内盐水的含量 $s=s(t)$ 满足：

$s'=-2s(100+t)^{-1},\ s(0)=10)$（ 9 分）

解该问题得：$s(t)=100000(100+t)^{-2},$（ 14 分）

从而 $s(60)\simeq 3.9$（ 15 分）