《常微分方程》试题（二）参考答案

一．单项选择题： 每小题 2 分，共 10 分）

1．B　2．B　3．A　4．A　5．B

二．填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1． $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \psi(x)$

2．0

3．（1） $y_1, \cdots, y_n$ 是该方程的解，（2） $y_1, \cdots, y_n$ 线性无关

4． $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-6x}$

5．稳定的退化结点

三．计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1．变量分离得

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \text{（3 分）}$$

积分之得通积分

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = c(0 < c < 2) \qquad \text{（8 分）}$$

还有特解 $x = \pm 1(-1 < y < 1), y = \pm 1(-1 < x < 1)$　　**（10 分）**

2．因为 $\dfrac{\partial}{\partial y}(6xy^2 + 4x^3) = \dfrac{\partial}{\partial x}(6x^2 y + 3y^2)$

故该方程是全微分方程　　**（4 分）**

选特殊路径积分得原函数 $U(x, y) = 3x^2 y^2 + x^4 + y^3$　**（8 分）**

从而通积分为 $3x^2 y^2 + x^4 + y^3 = c$　**（10 分）**

3．特征方程是 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

特征根是　3，-1　　**（3 分）**

齐次方程的通解是 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$ **（5 分）**

由比较系数法或常数变易法可得一特解，例如 $-\dfrac{1}{4} x e^{-x}$ **（9 分）**

从而通解为 $$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{4} x e^{-x}$$ **（10 分）**

4．特征方程为 $-(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$

特征根为 2， -1（重根）**（3 分）**

2 对应的特征向量为 $l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **（5 分）**

-1 对应的特征向量为 $l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, l_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **（9 分）**

故 $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 l_1 e^{2t} + c_2 l_2 e^{-t} + c_3 l_3 e^{-t}$$ **（10 分）**

四． 令 $D = \{(x, y) : |x + 1| \le 1, |y| \le 1\}$

则方程的右端函数 $f(x, y)$ 在 D 上满足解的存在唯一性定理条件**（2 分）**

$f(x, y)$ 在 D 上的 Lip. 常数为 $L = \max\limits_D |f_y| = 2$ **（4 分）**

$f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 4 **（6 分）**

从而 $h = \min\{1, 1/4\} = 1/4$ **（8 分）**

解的存在区间为 $[-5/4, -3/4]$ **（10 分）**

五． 设所求曲线为 $y = y(x)$，依题意得

$$y = x\frac{dy}{dx} \pm 2\sqrt{\frac{-dy}{dx}}$$ **（5 分）**

这是开莱罗方程 **（6 分）**

通解为 $y = c'x \pm 2\sqrt{-c'} = 2c - c^2 x$ **（8 分）**

求包络得奇解 $xy = 1$ **（10 分）**

六． 取定正函数 $V(x, y) = x^2 + y^2$ **（4 分）**

则全导数$\dfrac{dV}{dt}=0$ 是常负函数 **（8 分）**

由 Liapunov 稳定性定理知零解是稳定的 **（10 分）**

七．设$x(t)$是该方程的任一解，满足 $x(0)=x_0$，从而

$$x(t)=x_0e^t+\int_0^t f(s)e^{t-s}ds=\frac{\int_0^t e^{-s}f(s)ds+x_0}{e^{-t}}$$ **（4 分）**

为使 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=-1$ 必须 $x_0=\int_0^{+\infty}f(s)e^{-s}ds$. **（6 分）**

由比较判别法知$\int_0^{+\infty}f(s)e^{-s}ds$收敛， **（7 分）**

故只有在$x_0=\int_0^{+\infty}f(s)e^{-s}ds$时

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}f(t)}{-e^{-t}}=-1.$$ **（10 分）**