《常微分方程》试题(三)参考答案

一．单项选择题： 每小题 2 分，共 10 分）

1．C　2．B　3．A　4．D　5．D

二．填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．$(\mu M)_y=(\mu N)_x$　2．-3　3．0

4．$y=0$　5．稳定焦点

三．计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1．变量分离得 $\dfrac{arctgxdx}{1+x^2}=dy$ **（4 分）**

积分之得通积分 $y=\dfrac{1}{2}(arctgx)^2+c$ **（10 分）**

2．易证，$\mu(y)=y^{-2}$ 是该方程的积分因子 **（4 分）**

以 $\mu(y)$ 乘原方程两边得 $d(\ln|y|-\dfrac{x^2}{y})=0$ **（8 分）**

于是，$y\neq 0$ 时的通积分为 $\ln|y|-\dfrac{x^2}{y}=c$ **（9 分）**

$y=0$ 是特解 **（10 分）**

3．特征方程是 $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$

特征根是 -1（三重）**（3 分）**

齐次方程的通解是 $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}$ **（5 分）**

由比较系数法或常数变易法可得一特解，例如 $\dfrac{1}{24}x^3(x-20)e^{-x}$ **（9 分）**

从而通解为 $y=c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}+\dfrac{1}{24}x^3(x-20)e^{-x}$ **（10 分）**

4．特征根为 2，3，6 **（3 分）**

2 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ **（5 分）**

3 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **（7 分）**

6 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ **（9 分）**

故 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3t}+c_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}e^{6t}$ **（10 分）**

四．该方程右端函数在全平面上满足解的存在唯一性定理和延拓定理的条件**（2 分）**

此方程的通解为 $y=\dfrac{1+ce^x}{1-ce^x}$ **（5 分）**

过 $(0,0)$ 的解为 $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ **（7 分）**

解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$ **（10 分）**

五．设所求曲线为 $y=y(x)$，依题意得 $\left|x-\dfrac{y}{y'}\right|+\left|y-xy'\right|=1$

化简得 $y=xy'-\dfrac{y'}{1-y'}$ **（5 分）**

这是开莱罗方程 **（6 分）**

通解为 $y=cx-\dfrac{c}{1-c}$ **（8 分）**

求包络得奇解

$4x=(x-y+1)^2$ **（10 分）**

六．取定正函数 $V(x,y)=3x^2+4y^2$ **（4 分）**

则全导数 $\dfrac{dV}{dt}=-6x^4-8y^4$ 是定负函数**（8 分）**

由 Liapunov 稳定性定理知 0 解是渐近稳定的**（10 分）**

七．设 $y'(x)+y(x)=f(x)$, 则

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0.$ $y(x)=\dfrac{c+\int_{x_0}^{x} f(s)e^{s}ds}{e^{x}}$ （**3 分**）

$\forall\varepsilon>0$，对充分大的 x_1，当 $x>x_1$ 时，有 $|f(t)|<\varepsilon$。（**4 分**）

故 $|y(x)|\le\dfrac{|c|+\int_{x_0}^{x}|f(s)|e^{s}ds}{e^{x}}$ （**6 分**）

$\le\dfrac{|c|+\int_{x_0}^{x_1}|f(s)|e^{s}ds+\varepsilon\int_{x_1}^{x}e^{s}ds}{e^{x}}\to\varepsilon(x\to+\infty)$（**8 分**）

由 ε 的任意性有 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0.$（**10 分**）