《常微分方程》试题（四）参考答案

一．单项选择题：　每小题 2 分，共 10 分）

1．C　2．B　3．D　4．B　5．C

二．填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1．$\dfrac{M_y - N_x}{-M} = \psi(y)$

2．$W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx}$

3．0

4．$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-25x}$

5．稳定的退化结点

三．计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1．令 $x+y=u$，则　$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u+1}{u}$　**（2 分）**

变量分离得　$(1-\dfrac{1}{u+1})du = dx$　**（4 分）**

积分之得　$u - \ln|u+1| = x + c$

通积分为　$y - \ln|x+y+1| = c$ ，

即　$x+y+1 = ce^y$　**（7 分）**

还有特解 $u=-1 \to x+y=-1$ （上式在 c=0 的情况）**（8 分）**

故通积分为　$x+y+1 = ce^y$　（c 是任意常数）**（10 分）**

2．因为　$\dfrac{\partial}{\partial y}(6xy^2+3x^2) = \dfrac{\partial}{\partial x}(6x^2y+4y^3)$

故该方程是全微分方程　**（4 分）**

选特殊路径积分得原函数　$U(x,y) = 3x^2y^2 + x^3 + y^4 - 5$　**（8 分）**

从而通积分为　$3x^2y^2 + x^3 + y^4 = c$　**（10 分）**

3．特征方程是 $\lambda^2+1=0$

特征根是 $\pm i$ （**3 分**）

齐次方程的通解是 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$（**5 分**）

由比较系数法或常数变易法可得一特解，例如 $-x\cos x$（**9 分**）

从而通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-x\cos x$ （**10 分**）

4． 特征根为 2， -1（**2 分**）

2 对应的特征向量为 $l_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ -1 对应的特征向量为 $l_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

故齐次方程的通解是 $y=c_1l_1e^{2t}+c_2l_2e^{-t}$（**5 分**）

设 $y=c_1(t)l_1e^{2t}+c_2(t)l_2e^{-t}$ 是原方程的解，

代入且解之得

$$\begin{cases}c_1=-\dfrac{5}{3}e^{t}(\cos t+\sin t)\\ c_2=\dfrac{1}{3}e^{-2t}(2\cos t-\sin t)\end{cases}$$ （**9 分**）

从而通解为 $$\begin{cases}x=c_1e^{-t}+c_2e^{2t}-\cos t-2\sin t\\ y=-c_1e^{-t}+2c_2e^{2t}+3\cos t+\sin t\end{cases}$$ （**10 分**）

四、该方程右端函数在全平面上满足解的存在唯一性定理和延拓定理的条件（**2 分**）

此方程的通解为 $y=\dfrac{1+ce^{x}}{1-ce^{x}}$（**5 分**）

过 $(\ln 2,-3)$ 的解为 $y=\dfrac{1+e^{x}}{1-e^{x}}$（**7 分**）

解的存在区间为 $(0,+\infty)$（**10 分**）

五、设所求曲线为 $y=y(x)$，依题意得

$$\left|x-\frac{y}{y'}\right|+\left|y-xy'\right|=2a$$

化简得 $y=xy'-\dfrac{2ay'}{1-y'}$ （**5 分**）

这是开莱罗方程　　　　　（**6 分**）

通解为　　　$y = cx - \frac{2ac}{1-c}$（**8 分**）

求包络得奇解

$$8ax = (x - y + 2a)^2$$（**10 分**）

六．取定正函数　　　　$V(x, y) = x^4 + y^4$（**4 分**）

则全导数 $\frac{dV}{dt} = 0$ 是常负函数　　　　　（**8 分**）

由 Liapunov 稳定性定理知零解是稳定的　（**10 分**）

七．设 $x(t)$ 是该方程的任一解，满足 $x(t_0) = x_0, t_0 \in [0, +\infty)$，　从而

$$x(t) = x_0 e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} f(s) e^{s-t} ds，\quad 其中\ f(t) = t^{10} e^{-t}$$（**4 分**）

只须证 $x(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 有界。

因为 $\exists M > 0, \ni t \in [t_0, +\infty)$ 时　$|f(t)| \le M, t \in [0, +\infty)$

则 $t \in [t_0, +\infty)$ 时

$$|x(t)| \le |x_0| + Me^{-t} \int_{t_0}^{t} e^s ds \le |x_0| + M$$（**10 分**）