《常微分方程 》试题（五）参考答案

一．单项选择题： 每小题 2 分，共 10 分）

1．A 2．D 3．A 4．B 5．C

二．填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1． $x^2+x^2y'^2=4$

2．0

3． $e^{\lambda_0 x}$， $xe^{\lambda_0 x}$， $\cdots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$

4. $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$， $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}$

5． $r=1$

三．计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1． 变量分离得 $\cos x dx=\dfrac{dy}{y^2}$ **（3 分）**

积分之得通积分 $-\dfrac{1}{y}=\sin x+c \to y=-\dfrac{1}{\sin x+c}$ **（8 分）**

还有特解 $y=0$ **（10 分）**

2． 易求 $\mu(x)=e^x$ 是该方程的积分因子 **（4 分）**

以 $\mu(x)$ 乘原方程两边得 $d[ye^x(x^2+\frac{1}{3}y^2)]=0$ **（8 分）**

于是通积分为 $ye^x(x^2+\frac{1}{3}y^2)=c$ **（10 分）**

3．特征方程是 $\lambda^2-4\lambda+4=0$ 特征根是 2（二重） **（3 分）**

齐次方程的通解是 $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$ **（5 分）**

由比较系数法或常数变易法可得一特解，例如 x^2e^{2x} **（9 分）**

从而通解为 $y=(c_1+c_2x)e^{2x}+x^2e^{2x}$ **（10 分）**

4． 特征方程为 $-(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$

特征根为 2， -1（重根） **（3 分）**

对应的特征向量为 $l_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **（5 分）**

-1 对应的特征向量为 $l_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},l_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ **（9 分）**

故 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c_1l_1e^{2t}+c_2l_2e^{-t}+c_3l_3e^{-t}$ **（10 分）**

四． 毕卡列为

$\phi_0(x)=1$， **（2 分）**

$$\phi_1(x)=1+\int_0^x(1-s^2)ds=1+x-\frac{1}{3}x^2$$ **（6 分）**

$$\phi_2(x)=1+\int_0^x({\phi_1}^2-s^2)ds=1+x+x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{x^7}{63}\text{。}$$ **（10 分）**

五．该方程是开莱罗方程， 通解为 $y=cx+c-c^2$ **（6 分）**

求包络得奇解 $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$ $\lambda^2-7=0$ **（10 分）**

六．特征方程为 $\lambda^2-7=0$ 特征根为 $\pm\sqrt{7}$ **（3 分）**

鞍点， 不稳定 **（10 分）**

七．齐次方程的基本解组是 e^{-2x},xe^{-2x}，**（4 分）**

由常数变易法知该方程的通解为

$$y(x)=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\int_0^x(xe^{-2x}e^{2s}-se^{2s-2x})f(s)ds$$ **（6 分）**

只要证明第三项以 0 为极限，这可由罗比塔法则得到。 **（10 分）**