《常微分方程》试题 (六) 参考答案

一、单项选择题 (每小题 2 分，共 10 分)

1. B　　2. A　　3. A　　4. A　　5. B

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 它的朗斯基行列式 $W(x) \neq 0$.　　2. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

3. (1) y_1，$\cdots$，y_n 是该方程组的解，　(2) y_1，$\cdots$，y_n 线性无关.

4. $y = 0$.　　5. $e^y = e^x + C$.

三、求出下列方程（组）的通解（每小题 10 分，共 40 分）

1. 变量分离得 $\frac{\arctan x dx}{1+x^2} = dy$,　　4 分

两端积分后得方程的通解为 $y = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$.　　10 分

2. 易证，$\mu(y) = y^{-2}$ 是该方程的积分因子.　　4 分

以 $\mu(y)$ 乘以原方程两边得 $d(\ln|y| - \frac{x^2}{y}) = 0$.　　8 分

于是，$y \neq 0$ 时的通积分为 $\ln|y| - \frac{x^2}{y} = C$.

其次，$y = 0$ 也是该方程的解.　　10 分

3. 对应齐次方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的特征方程是 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

则可得特征根 $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, 从而，对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$　　5 分

因为 $\alpha = 0$ 不是特征根，因而原方程有形如 $\tilde{y} = A + Bx$ 的特解.

利用待定系数法可得 $A = \frac{1}{3}$, $B = -1$, 故原方程的一个特解为 $\tilde{y} = \frac{1}{3} - x$.

由此可得原方程的通解为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x + \frac{1}{3}$.　　10 分

4. 原方程组对应的齐次方程组的系数矩阵为 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

特征方程为 $det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0,$

特征根是 $\lambda_1=1,\ \ \lambda_{2,\ 3}=-2.$

$\lambda_1=1$ 对应的特征向量 $T_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$

则对应于 $\lambda_1=1$ 的一个特解为 $x_1=e^t,\ y_1=e^t,\ z_1=e^t;$ 5 分

设对应于二重特征根 $\lambda_{2,\ 3}=-2$ 的解为

$$x=(r_{11}+r_{12}t)e^{-2t},\ \ y=(r_{21}+r_{22}t)e^{-2t},\ \ z=(r_{31}+r_{32}t)e^{-2t},$$

代入原方程组，消去 e^{-2t} 并化简整理后得

$$r_{12}=r_{22}=r_{32}=0,\ r_{11}+r_{21}+r_{31}=0.$$

首先，令 $r_{11}=0,\ r_{21}=1,\ r_{31}=-1,$ 得对应于 $\lambda_{2,\ 3}=-2$ 的一个特解

$$x_2=0,\ y_2=e^{-2t},\ z_2=-e^{-2t};$$

其次，再令 $r_{11}=1,\ r_{21}=0,\ r_{31}=-1,$ 得对应于 $\lambda_{2,\ 3}=-2$ 的另一个特解

$$x_3=e^{-2t},\ y_3=0,\ z_3=-e^{-2t}.$$

易证这三个解在 $t=0$ 时的朗斯基行列式 $W(0)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-3\neq 0,$

故它们是线性无关的.

由此可得原方程组的通解为

$$\begin{cases}x(t)=C_1e^t+C_3e^{-2t},\\ y(t)=C_1e^t+C_2e^{-2t},\\ z(t)=C_1e^t-C_2e^{-2t}-C_3e^{-2t}.\end{cases}$$ 10分

四、 (10 分) 首先，我们证明 $\Phi(t)$ 是解矩阵.

令 $\varphi_1(t)=\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}$, 则 $\varphi_1'(t)=\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\varphi_1(t),$

从而 $\varphi_1(t)$ 是该方程组的一个解. 4 分

同理有， $\varphi_2'(t)=\begin{bmatrix}(t+1)e^t\\e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}te^t\\e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\varphi_2(t),$

则 $\varphi_2(t)$ 也是该方程组的一个解. 8 分

因此， $\Phi(t)=[\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)]$ 是解矩阵.

其次，由于 $det\Phi(t)=e^{2t}\neq 0$, 所以 $\Phi(t)$ 是基解矩阵. 10 分

五、（10 分） 设所求曲线为 $y=y(x)$.

依题设条件可得 $y'=-\frac{y}{x}$

用变量分离法解此微分方程即得所求的曲线族 $xy=C$,

其中， C 是任意常数.

六、（10 分） 设 $f(x,y)=e^y$, 则 $f'_y(x,y)=e^y$. 从而 $f(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 在 xOy 平面上连续，由此可以证明方程的右端函数在整个 xOy 平面上满足延展定理及存在唯一性定理的条件. 易于看到， $y=\pm 2$ 为方程在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的解，由延展定理可知，满足 $y(1)=0$ 的解 $y=y(x)$ 上的点应当无限远离原点，但是，由解的唯一性，
$y=y(x)$ 又不能穿过直线 $y=\pm 2$, 故只有可能向两侧延展而无限远离原点，从而解的最大存在区间是 $(-\infty,\ +\infty)$.

七、（10 分） 设 $y'(x)+y(x)=f(x)$,

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad y(x)=\frac{C+\int_{x_0}^{x}f(s)e^{s}ds}{e^{x}}$ 3 分

$\forall\,\varepsilon>0$, 对充分大的 x_1, 当 $x>x_1$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon$. 4 分

故

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leq \frac{|C|+\int_{x_0}^{x}|f(s)|e^{s}ds}{e^{x}}\\ &\leq \frac{|C|+\int_{x_0}^{x_1}|f(s)|e^{s}ds+\varepsilon\int_{x_1}^{x}e^{s}ds}{e^{x}}\\ &\longrightarrow \varepsilon(x\to+\infty).\end{aligned}$$ 8分

由 ε 的任意性有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$. 10 分