《常微分方程》试题 (八) 参考答案

一、 (1)　变量分离得通解为 $y=\ln(1+ce^{-e^x}), c\in\mathbf{R}$（ 10 分）。

(2)　本题至少可以用 2 种方法求解：寻找只与 y 有关的积分因子；视作以 y 为自变量， x 为函数的 Bernoulli 方程。

其通解为 $y=ce^{x^2/y}, c\in\mathbf{R}$（ 10 分）或

$x^2=y[\ln|y|+c], c\in\mathbf{R}$ 与 $y=0$（ 10 分）。

(3)　相应的齐次方程的通解为 $y=c_1e^{3x}+(c_2+c_3x)e^{2x}$ ，（ 5 分）

应用比较系数法，设非齐次方程的特解为 $y=ax+b$,

代入原方程得 $a=-\frac{1}{12}$,$b=-\frac{1}{9}$（ 8 分）

于是原方程的通解为

$y=c_1e^{3x}+(c_2+c_3x)e^{2x}-\frac{1}{12}x-\frac{1}{9}$（ 10 分）

二、特征方程是 $(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)=0$,

特征根是 $\lambda_1=1, \lambda_2=3, \lambda_3=-2$（ 3 分）,

$\lambda_1=1$ 对应的解是 $(-1,4,1)e^t$,

$\lambda_2=3$ 对应的解是 $(1,2,1)e^{3t}$,

$\lambda_3=-2$ 对应的解是 $(-1,1,1)e^{-2t}$（ 12 分）,

通解是

$(x,y,z)=C_1(-1,4,1)e^t+C_2(1,2,1)e^{3t}+C_3(-1,1,1)e^{-2t}$ （ 15 分）

三、容易求得该问题的解为 $y=x\ln x$,

其最大存在区间是 $(0,+\infty)$.（ 5 分）

四、该系统的奇点是 $(0,0)$ ， $ac<0$ 时是鞍点；（ 2 分）

$ac>0, a\neq c, a>0$ 时是不稳定结点；（ 4 分）

$ac>0, a\neq c, a<0$ 时是稳定结点；（ 6 分）

$a=c, b\neq 0$ 时是退化结点；（ 8 分）

$a=c, b=>0$ 时是奇结点（ 10 分）

五、证明：方程 $x'+x=\sin t$ 的一切解在 $[0,+\infty)$ 上都存在。

不妨设 $t=0$ 时解 $x(t)$ 的初值为 x_0 ，此时

$x(t)=x_0e^{-t}+\int_0^t \sin s^2 e^{s-t}ds$,（ 5 分）

从而，任给 $t\in[0,+\infty)$, 有

$|x(t)|\leq |x_0|e^{-t}+\int_0^t e^{s-t}ds\leq |x_0|+e^{-t}\int_0^t e^s ds\leq |x_0|+1-e^{-t}\leq |x_0|+1$（ 15 分）

六、方程 $x''+x=\cos t$ 的通解是

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t+\frac{1}{2}t\sin t$$

（ 6 分）

显然，上式含有非周期项 $\frac{1}{2}t\sin t$ ，而其它项是周期的，（ 8 分）

故方程 $x''+x=\cos t$ 无周期解.（ 10 分）

七、首先建立曲线 $y=f(x)$ 所满足的微分方程： $y=xy'\pm 2a\sqrt{-y'}$ 与 $y=xy'\pm 2a\sqrt{y'}$

（ 9 分）

分别解这两个克莱罗方程得两簇直线，其包络线 $xy=\pm a^2$ 即为所求曲线.（ 15 分）