《常微分方程》试题 (九) 参考答案

一、 (1)　变量分离得通解为 $\ln y = ce^x, c \in \mathbf{R}$（ 10 分)。

(2)　易于验证该方程是全微分方程，两端积分得其通解为

$3x^2y^2 + x^4 + y^3 = c, c \in \mathbf{R}$（ 10 分)。

(3)　齐次方程 $y'' + y = 0$ 的通解为 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ， （ 4 分 ）

应用常数变易法，设 $y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$ 为 $y'' + y = \sec x$ 的特解，

代入原方程得 $c_1'(x) = -\tan x, c_2'(x) = 1$

解之得 $c_1(x) = \ln|\cos x| + b_1, c_2(x) = x + b_2$（ 8 分 ）

于是原方程的通解为

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\cos x, c_1, c_2 \in \mathbf{R}$（ 10 分 ）

二、特征方程是 $(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2) = 0,$

特征根是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$（ 3 分),

$\lambda_1 = 1$ 对应的解是 $(-1,4,1)e^t,$

$\lambda_2 = 3$ 对应的解是 $(1,2,1)e^{3t},$

$\lambda_3 = -2$ 对应的解是 $(-1,1,1)e^{-2t}$（ 12 分),

通解是

$(x,y,z) = C_1(-1,4,1)e^t + C_2(1,2,1)e^{3t} + C_3(-1,1,1)e^{-2t}$ （ 15 分 ）

三、容易求得该问题的解为 $y = (1-x)^{-1}$, （ 5 分 ）

其最大存在区间是 $(-\infty, 1)$. （ 10 分 ）

四、原点处的线性化系统的系数矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -a \end{bmatrix}$$

对应的特征方程是 $\lambda^2 + a\lambda - 2 = 0,$（ 6 分）

所以 $(0,0)$ 是鞍点， $(0,0)$ 周围的轨线分布草图是（略）（ 10 分）

五、证明：取 Liapunov 函数 $V(x,y) = 3x^4 + y^4$ ，有（ 4 分）

$\frac{dV(x,y)}{dt} = -12x^3 - 4y^6$（ 8 分）

故知零解是渐近稳定的。（ 10 分）

六、方程 $x'' + x = -\sin t$ 的通解是

$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2} t \cos t$（ 6 分）

显然，上式含有非周期项 $\frac{1}{2} t \cos t$ ，而其它项是周期的，（ 8 分）

故方程 $x'' + x = \cos t$ 无周期解.（ 10 分）

七、首先建立曲线 $y = y(x)$ 所满足的微分方程：

$\frac{xy' - y}{y'}^2 + (y - xy')^2 = a^2$（ 6 分）

经引入参数并微分消参得通解 $x = y \tan c + a \sin c$（ 11 分）

其包络线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 即为所求曲线.（ 15 分）